Condensé de cours MP

E.P. et Q.M.

19 juillet 2003

1 Analyse

1.1 Espaces vectoriels normés

Déf. et prop. 1.1.1 (Norme) – Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $N : E \to \mathbb{R}_+$. N est une norme pour E si elle vérifie les trois axiomes : $\forall x \in E, N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$; $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$; $\forall(x,y) \in E^2, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$
- Si E est une algèbre et $N(xy) \leq N(x)N(y)$, on parle de norme d'algèbre.
- Soit $(E, \|.\|)$ un evn et F un sev de E. La restriction de $\|.\|$ à F définit la norme induite sur F
- Soient $(E_1, N_1), \ldots, (E_n, N_n)$ des evn. L'application $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \prod E_i \mapsto N(x) = \max_i N_i(x_i)$ définit une norme sur $\prod E_i$.
- $\forall(x,y) \in E^2,\ |N(x) - N(y)| \leq N(x-y)$
- Deux normes N_1, N_2 sur un evn E sont dites équivalentes s'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tq $\forall x \in E,\ \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$.

Déf. et prop. 1.1.2 (Distance) – (E, N) un evn. On appelle distance associée à N l'application $d : E \times E \to R_+, (x,y) \mapsto N(x-y)$. d vérifie les trois axiomes d'une distance (métrique) : $\forall(x,y) \in E^2, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; $\forall(x,y) \in E^2, d(x,y) = d(y,x)$; $\forall(x,y,z) \in E^3,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.
- Pour $a \in E$ et $A \subseteq E$, on note $d(a, A) = inf_{x \in A} d(a,x)$; pour $B \subseteq E$, on note $d(A,B) = inf_{x \in B} d(x, A)$.

Théorème 1.1.3 (Équivalence des normes)
Dans un evn de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

Remarque 1.1.4 Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, on peut chercher $(x_n) \in (E \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$ telle que $\frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)}$ tende vers 0 ou ∞.

1.2 Topologie

Définitions 1.2.1 (Ouverts, fermés) – On appelle topologie sur un ensemble E un ensemble O de parties de E (les ouverts) stable par réunion (quelconque) et intersection finie et contenant E et $\emptyset$. Les fermés sont les complémentaires des ouverts.
- Soit $(E, \|.\|)$ est un evn. Par définition, $O \subseteq E$ est un ouvert si pour tout $x \in O$, il existe une boule contenant x et contenue dans O.
- Un voisinage de $x \in E$ est une partie de E contenant un ouvert qui contient x. Je noterais $V(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

Définitions 1.2.2 (Adhérence, intérieur) – $a \in A$ est un point adhérent à A si $\forall V \in V(a), V \cap A \neq \emptyset$. L'adhérence de A, notée $\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents à A.
- $a \in A$ est un point intérieur à A si $A \in V(a)$. On note $\mathring{A}$ et on appelle intérieur de A l'ensemble des points intérieurs à A.
- On note $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ la frontière de A.
- On dit que A est dense dans B ssi $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$

Propriétés 1.2.3 – $\overline{A}$ est un fermé. $A \subseteq \overline{A}$.
- Si F fermé, $A \subseteq F \Longrightarrow \overline{A} \subseteq F$ ($\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A). A est fermé ssi $\overline{A} = A$.
- La relation $\mathring{A} = E \setminus \overline{E \setminus A}$ permet de retrouver toutes les propriétés de l'intérieur : $\mathring{A} \subseteq A$, $\mathring{A}$ est un ouvert, tout ouvert inclus dans A est inclus dans $\mathring{A}$.
- $a \in \overline{A}$ ssi a est limite d'une suite d'éléments de A.
- $A \subseteq E$ est un fermé ssi la limite de toute suite convergente d'éléments de A est dans A.
- A est dense dans B ssi $A \subseteq B$ et tout élément de B est limite d'éléments de A.

Proposition 1.2.4 (Bolzano-Weierstraß) De toute suite bornée de réels on peut extraire une sous-suite convergente.

1.3 Limite, continuité

Définition 1.3.1 (Limite, continuité) – Soient E et F des evn, $f : A \subseteq E \to F$. On dite que f admet l pour limite en $a \in \overline{A}$ si pour tout $\forall V \in V(l)$, $\exists W \in V(a)$ tq $f(W) \subseteq V$. (c'est à dire : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| \leq \alpha \Longrightarrow \|f(x) - l\| \leq \varepsilon$).
- f est dite continue en $a \in A$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Définition 1.3.2 (Cont. uniforme, lipschitzité)
- On dit que $f : A \to F$ est uniformément continue ssi $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, \forall (x, x') \in A^2, \|x - x'\| \leq \alpha \Longrightarrow \|f(x) - f(x')\| \leq \varepsilon$.
- $f : A \to F$ est k-lipschitzienne si $\forall(x,y) \in A^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$.

Proposition 1.3.3 – $f \in F^A$ est continue en $a \in A$ ssi pour tout suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a, $f(u_n)$ converge vers $f(a)$.
- Lipschitzité $\Longrightarrow$ continuité uniforme $\Longrightarrow$ continuité.

Proposition 1.3.4 (Cas réel) – Théorème de la valeur intermédiaire. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a,b[$ tq $f(c) = 0$ (Autrement dit : si f continue, $f([a,b])$ est un intervalle).
- Soit $f : I \to J$ (I, J intervalles de $\mathbb{R}$) une application monotone surjective ; alors f est continue.
- Une application de $\mathcal{C}^0(I,J)$ injective est monotone.

Théorème 1.3.5 ("Continuité topologique")
Soit $f : A \subseteq E \to F$ (E, F deux evn) ; alors les trois assertions sont équivalentes :
(i) f est continue sur A ;
(ii) l'image réciproque de tout ouvert par f est un ouvert ;
(iii) l'image réciproque de tout fermé par f est un fermé.

Proposition 1.3.6 (Continuité des app. lin.)
- Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est continue ssi $\exists k > 0$ tq $\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq k \|x\|$.
- Soit E de dimension finie, toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est continue.
- $\mathcal{L}_c(E,F)$ désigne l'algèbre des applications linéaires continues de E dans F. L'application $|||.||| : \mathcal{L}_c(E,F) \to \mathbb{R}^+, u \mapsto \sup\{\|u(x)\| \mid x \in E \text{ et } \|x\| \leq 1\}$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}_c(E,F)$, appelée norme triple.
- $\forall(u,x) \in \mathcal{L}_c(E,F) \times E,\ \|u(x)\| \leq |||u|||\, \|x\|$.

1.4 Compléments de topologie

Définition 1.4.1 – Une partie A d'un evn est dite compacte ssi de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous suite convergente dont la limite est dans A.
– (HP) Ceci est équivalent à la propriété de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement de A par des ouverts (ie. famille d'ouverts de E dont l'union contient A) on peut extraire un recouvrement fini.

Propriétés 1.4.2 – Une partie compacte est nécessairement fermée bornée. Dans $\mathbb{K}^n$ (et dans tout evn de dimension finie) la réciproque est vraie.
– L'image d'une partie compacte par une fonction continue est compacte. En particulier une fonction réelle continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.
– Théorème de Heine. Une fonction continue sur un compact est uniformément continue.
– Si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in E$, $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est une partie compacte.

Déf. et prop. 1.4.3 (Complétude) – $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy ssi $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tq $q \geq N,\ p \geq N \Longrightarrow \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon$.
– Une suite de Cauchy est nécessairement bornée.
– Une partie A de E est dite complète si toute suite de Cauchy d'éléments de A converge vers un élément de A.
– $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{K}^n$ sont complets. Tout espace vectoriel de dimension finie est complet.

Déf. et prop. 1.4.4 (Suites de fonctions)
– $B(A, F)$ est l'ensemble des applications bornées de A dans F (c'est un sev de F^A) ; l'application $\|.\|_\infty$: $B(A, F) \to \mathbb{R}_+,\ f \mapsto \sup_{x\in A} \|f(x)\|$ est appelée norme de la convergence uniforme.
– (f_n) converge simplement (cvs) vers f si $\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Longrightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$.
– (f_n) converge uniformément (cvu) vers f si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ n > N \Longrightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$. Ceci équivaut à : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow \sup_{x\in A} \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$.
– Si f (limite simple de f_n) est bornée, alors f_n cvu vers f ssi f_n est bornée à partir d'un certain rang et f_n converge vers f au sens de $\|.\|_\infty$.

Proposition 1.4.5 (Cauchy et Cvu) – Une suite de fonctions $(f_n) \in F(A, F)^{\mathbb{N}}$ satisfait le critère de Cauchy pour la convergence uniforme si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ p, q \geq N \Longrightarrow \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon$. En fixant x, on obtient que $f_n(x)$ est une suite de Cauchy.
– Si F est complet ($f : A \to F$) alors toute suite satisfaisant le critère de Cauchy uniforme converge uniformément.
– Si F est complet, $B(A, F)$ est complet pour $\|.\|_\infty$.

Proposition 1.4.6 (Cvu et continuité) – Une limite uniforme de fonctions continues est continue.
– $\mathcal{C}^0(A, F)$ avec A compact et F complet est complet.
– Convergence compacte. Si $(f_n) \in \mathcal{C}^0(A, F)$ converge uniformément sur toute partie compacte de A alors sa limite simple est continue.

Théorème 1.4.7 (Interversion des limites)
Soit F un evn complet, $A \subseteq E$ un evn, $a \in \overline{A}$, $(f_n) \in F(A, F)^{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. On suppose que $l_n = \lim_{x\to a} f_n(x)$ existe pour tout n et que (l_n) converge vers l. Alors f admet une limite en a égale à l. Autrement dit, sous ces hypothèses $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Théorème 1.4.8 (Point fixe)
Soit A une partie complète non vide d'un evn E, et $f : A \to A$ une application contractante (c'est à dire k-lipschitzienne avec $k < 1$). Alors $\forall u_0 \in A$, la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique point fixe de f dans A.

Théorème 1.4.9 (Point fixe, HP)
Soit K un compact non vide d'un evn E et $f : K \to K$ telle que $\forall x \neq y\ \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$. Alors $\forall u_0 \in K$, la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique point fixe de f dans K.

1.5 Dérivation des fonctions d'une variable réelle

Déf. et prop. 1.5.1 (Dérivabilité) – f est dérivable en a s'il existe $l \in E$ tq $f(t) = f(a) + (t-a)l + o(\|t - a\|)$
– Si f dérivable en a, f est continue en a.
– Soient E, F, G 3 evn de dimension finie, $B : E \times F \to G$ bilinéaire, et f, g dérivables en $a \in I$; $B(f, g)$ est dérivable en a et $(B(f, g))'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$.
– Soit $f : I \to E$ dérivable. f est constante sur I ssi $f'(I) = \{0\}$.
– Formule de Leibniz. Pour f et g $\mathcal{C}^k$, $(fg)^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i f^{(i)}(t) g^{(k-i)}(t)$

Déf. et prop. 1.5.2 (Difféomorphismes)
– Une fonction bijective, $\mathcal{C}^k$ dont la réciproque est $\mathcal{C}^k$ est appelée $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme (si $k = 0$ on parle d'homéomorphisme).
– $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de I sur $f(I)$ ssi $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$ et dans ce cas $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Théorème 1.5.3 (Rolle, Accroissements finis)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$ $(b > a)$. Rolle : $f(a) = f(b) \Longrightarrow \exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$. Accroissements finis : $\exists c \in]a, b[, \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Théorème 1.5.4 (Prolongement $\mathcal{C}^k$)
Soit $f :]a, b] \to E$ de classe $\mathcal{C}^k$ tq $f^{(k)}$ ait une limite l en a. Alors f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a, b]$.

Déf. et prop. 1.5.5 (Convexité)
– Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x, y, t) \in I^2 \times [0, 1], f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$ est dite convexe.
– Si $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$, si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, alors $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.
– Si f est $\mathcal{C}^1$, f convexe $\Longleftrightarrow f'$ est croissante.
– Si f est $\mathcal{C}^2$, f convexe $\Longleftrightarrow f'' \geq 0$.
– Une fonction convexe sur I est continue sur $\mathring{A}$.

Théorème 1.5.6 (Darboux, hors programme)
$f : I \to \mathbb{R}$ dérivable (mais pas nécessairement $\mathcal{C}^1$). Alors $f'(I)$ est un intervalle (lire : une dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires même si elle n'est pas continue).

1.6 Séries

Propriétés 1.6.1 (Convergence) – Le terme général d'une série convergente tend nécessairement vers 0.
- Soit $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. La série $\sum u_n$ converge ssi la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^{p} u_n)_p$ est majorée.
- La série de terme général u_n satisfait le critère de Cauchy si la suite des sommes partielles le vérifie. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ q \geq p \geq N \Longrightarrow \left\| \sum_{n=p}^{q} u_n \right\| \leq \varepsilon$.

Déf. et prop. 1.6.2 (Convergence absolue)
- Si la série $\sum \|u_n\|$ est convergente, on dit que $\sum u_n$ est absolument convergente.
- Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, E étant complet. Si $\sum u_n$ est absolument convergente, elle est convergente.

Déf. et prop. 1.6.3 (Deux séries classiques) E désigne une algèbre normée complète.
- Soit $u \in E$ tq $\|u\| < 1$ alors la série $\sum u^n$ converge et a pour somme $(e-u)^{-1}$.
- Soit $u \in E$; la série de terme général $\frac{1}{n!}u^n$ est convergente, et sa somme est notée e^u. Si u et v commutent, $e^{u+v} = e^u \cdot e^v$.

Désormais on considère uniquement les séries numérique : $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition 1.6.4 (Recettes)
- Règle de D'Alembert : (u_n) est à termes positifs, et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$. Alors si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge, si $l < 1$, $\sum u_n$ converge.
- Séries alternées. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$; si $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, et que (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang, alors la série $\sum(-1)^n u_n$ converge, et on a de plus $|R_p| \leq |u_{p+1}|$ (R_p désigne le reste partiel d'ordre p).
- Série de Riemann. $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente ssi $\alpha > 1$

Proposition 1.6.5 (Recettes HP)
- Séries de Bertrand. La série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ est convergente ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.
- Règle de Raab-Duhamel : si $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \alpha/n + O(1/n^2)$ alors il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim An^\alpha$.

Théorème 1.6.6 (Comparaison séries-intégrales)
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ décroissante. Alors la série de terme général $w_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt$ est convergente. En particulier la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^\infty f(t)dt$ ont même nature.

Théorème 1.6.7 (Comparaison asymptotique)
Soient deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ à termes positifs.
- *Si $\sum b_n$ converge et $a_n = O(b_n)$, alors $\sum a_n$ converge et les restes vérifient $(\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n)_p = O(\sum_{n=p+1}^{\infty} b_n)$ (idem pour o et $\sim$).*
- *Si $\sum b_n$ diverge et $a_n \sim b_n$, alors $\sum a_n$ diverge et les sommes partielles vérifient $(\sum_{n=0}^{p} a_n)_p \sim (\sum_{n=0}^{p} b_n)_p$.*
- *Si $\sum b_n$ diverge et $a_n = o(b_n)$ (resp $O(b_n)$) alors les sommes partielles vérifient $(\sum_{n=0}^{p} a_n)_p = o((\sum_{n=0}^{p} b_n)_p)$ (resp O).*

Proposition 1.6.8 (Stirling) $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$.

1.7 Familles sommables

Déf. et prop. 1.7.1 – Soit $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$; la famille est dite sommable si l'ensemble $\{\sum_{i\in J} a_i \mid J \subseteq I,\ J \text{ finie}\}$ est majoré. Soit $(b_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$; la famille est dite sommable si la famille $(|b_i|)$ l'est.
- Une famille $(a_i) \in \mathbb{R}_+^I$ est sommable ssi pour toute suite croissante (J_n) de parties finies de I dont l'union vaut I (suite convenable pour I), la suite $(\sum_{i\in J_n} a_i)_n$ est majorée.
- Soit $a \in \mathbb{K}^I$ une famille sommable. Alors pour toute suite J_n convenable pour I, la suite $(\sum_{i\in J_n} a_i)_n$ converge, et sa limite, qui ne dépend pas de (J_n) est appelée somme de a (notée $s(a)$).

Déf. et prop. 1.7.2 (Sommabilité et suites)
- Une suite $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série de terme général u_n est convergente et dans ce cas $s(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.
- Une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est sommable ssi $\sum u_n$ est absolument convergente et dans ce cas $s(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.
- Soit $\ell^1(\mathbb{K}) = \{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid u \text{ sommable}\}$, et pour $u \in \ell^1(\mathbb{K})$, $\|u\|_1 = s(u)$. Alors $(\ell^1(\mathbb{K}), \|.\|_1)$ est un evn.
- $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ est sommable ssi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables et alors $s(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_{-n}$.

Théorème 1.7.3 (Suites doubles)
Soit $u = (u_{p,q}) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^2}$ une suite double. u est sommable ssi $\forall p$ la série $\sum_q u_{p,q}$ est absolument convergente et la série $\sum_p \sum_{q=0}^{\infty} |u_{p,q}|$ est convergente, ssi $\forall q$ la série $\sum_p u_{p,q}$ est abs. convergente et $\sum_q \sum_{p=0}^{\infty} |u_{p,q}|$ est convergente.

Théorème 1.7.4 (Interversion des sommations)
Soit $(u_{p,q}) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^2}$ sommable. Alors $s(u) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}$

Corollaire 1.7.5 Soient $(a,b) \in (\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^2$ deux familles sommables. Alors la famille $(a_p b_q) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^2}$ est sommable et $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_p b_q = (\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p)(\sum_{p\in\mathbb{N}} b_q)$.

1.8 Intégration sur un segment

Propriétés 1.8.1 – Linéarité de l'intégrale. L'application $\mathcal{C}^0_{\text{mx}}([a,b],E) \to E, f \mapsto \int_{[a,b]} f$ est linéaire.
- L'intégrale d'une fonction positive est positive.
- L'intégrale d'une fonction $\mathcal{C}^0$ est nulle ssi la fonction est nulle (donc $\|f\|_1 = \int_{[a,b]} |f|(t)dt$ est une norme sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$).
- Relation de Chasles. $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.
- Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\text{mx}}([a,b],E)$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$; alors $u \circ f$ est $\mathcal{C}^0_{\text{mx}}$ et $\int_{[a,b]} u \circ f = u(\int_{[a,b]} f)$.

Théorème 1.8.2
Soit $(f_n) \in \mathcal{C}^0_{\text{mx}}([a,b],E)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonction convergent uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{\text{mx}}([a,b],E)$. Alors la suite des intégrales est convergente et $\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} \lim_{n\to\infty} f_n$.

Proposition 1.8.3 (Normes) – Norme de la convergence en moyenne. L'application $\|.\|_1 : \mathcal{C}^0([a,b],E) \to \mathbb{R}_+,\ f \mapsto \int_{[a,b]} \|f\|$ est une norme.
- Norme de la convergence en moyenne quadratique. L'application $\|.\|_2 : \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+,\ f \mapsto (\int_{[a,b]} |f|^2)^{1/2}$ est une norme.

Proposition 1.8.4 (Inégalités)

- Inégalité de Cauchy-Schwarz. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors $\left|\int_{[a,b]} \overline{f}g\right| \leq (\int_{[a,b]} |f|^2)^{1/2}(\int_{[a,b]} |g|^2)^{1/2}$
- Minkowski. Avec les mêmes hypothèses, on a : $(\int_{[a,b]} |f+g|^2)^{1/2} \leq (\int_{[a,b]} |f|^2)^{1/2} + (\int_{[a,b]} |g|^2)^{1/2}$

Théorème 1.8.5 (Sommes de Riemann)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],E)$ (NB : je note $p(\sigma)$ le pas de la subdivision σ). $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tq $\forall \sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ avec $a_0 = a$, $a_n = b$, $\forall \xi = (\xi_p) \in \mathbb{R}^n$, $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$, $p(\sigma) \leq \alpha \Longrightarrow \left\|\int_{[a,b]} f - \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(\xi_i)\right\| \leq \varepsilon$

1.9 Dérivation et intégration

Définition 1.9.1 On appelle primitive d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}(I,E)$ toute fonction g continue, $\mathcal{C}^1_{\mathrm{mx}}$ tq en tout point où f est continue, $g'(x) = f(x)$.

Théorème 1.9.2 (Théorème fondamental)
Soit $f : I \to E$ continue (resp. $\mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}$) et $a \in I$. La fonction définie par $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ qui est $\mathcal{C}^1$ (resp. $\mathcal{C}^1_{\mathrm{mx}}$) est l'unique primitive de f s'annulant en a. On en déduit que deux primitives diffèrent d'une constante.

Proposition 1.9.3

- Changement de variable. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}(I,E)$, et $\phi \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta],I)$ une fonction strictement monotone. Alors $\int_\alpha^\beta \phi'(t)f(\phi(t))dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx$.
- Intégration par partie. Soit $B : E \times F \to G$ (trois evn de dim finie) une application bilinéaire, et soient $f : [a,b] \to E$, $g : [a,b] \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$. On a : $\int_a^b B(f'(t),g(t))dt = [B(f(t),g(t))]_a^b - \int_a^b B(f(t),g'(t))dt$.
- Inégalité de la moyenne. $f : [a,b] \to E$ continue de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$ tq $\|f'(t)\| \leq \lambda$ alors $\forall x,y \in]a,b[$, $\|f(x)-f(y)\| \leq \lambda\,|x-y|$.

Proposition 1.9.4 (Taylor)

- Formule de Taylor-Lagrange. Soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{C}^{k+1}_{\mathrm{mx}}$ sur I. Pour $a,b \in I$, on a l'égalité suivante : $f(b) = \sum_{l=0}^k \frac{(b-a)^l}{l!} f^{(l)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)dt$.
- Inégalité de Taylor-Lagrange. Avec les mêmes hypothèses, et en notant $M = \sup_{[a,b]} \left\|f^{(k+1)}(t)\right\|$, on a : $\left\|f(b) - \sum_{l=0}^k \frac{(b-a)^l}{l!} f^{(l)}(a)\right\| \leq \frac{|b-a|^{k+1}}{(k+1)!} M$.
- Formule de Taylor-Young. Soit f de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $a \in I$. Alors f admet un d.l à l'ordre k en a donné par : $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(x-a)^k$.

Théorème 1.9.5 (Primitive d'une suite de fonction)
Soit $(f_n) \in \mathcal{C}^0(I,E)^{\mathbb{N}}$, $a \in I$. Soit (h_n) la suite des primitives des f_n s'annulant en a. Si (f_n) cvs vers f, la cv étant uniforme sur tout segment inclus dans I (f est donc continue), alors la suite (h_n) cvs vers la primitive de f qui s'annule en a, la cv étant uniforme sur tout segment inclus dans I.

Théorème 1.9.6 (Dérivée d'une suite de fonction)
Soit $(f_n) \in \mathcal{C}^1(I,E)^{\mathbb{N}}$. On suppose (f_n) cvs vers f et (f'_n) cvs vers g, la cv étant uniforme sur tout segment inclus dans I. Alors f est $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est g.

Théorème 1.9.7 (Dérivées d'une suite de fonction)
Soit $(f_n) \in \mathcal{C}^k(I,E)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\forall 0 \leq l \leq k$, $(f_n^{(l)})$ cvs, et que $f^{(k)}$ cvu sur tout segment inclus dans I. Si on note $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ et $g = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}$, alors f est $\mathcal{C}^k$ et $f^{(k)} = g$.

Proposition 1.9.8 Soit $(A, \|.\|)$ une algèbre normée complète et $a \in A$. Soit $\phi_a(t) = exp(ta)$. ϕ_a est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},A)$ et $\phi_a^{(k)} = a^k\phi_a(t)$.

Théorème 1.9.9 (Continuité sous le signe somme)
Soit $A \subseteq E$ evn de dimension finie et $f \in \mathcal{C}^0(A \times [a,b], E)$. Alors $g(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ est continue sur A.

Théorème 1.9.10 (Dérivation sous le signe somme)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(I \times [a,b], E)$ telle que pour $i \leq k$ $\frac{\partial^i f}{\partial x^i}$ existe et soit continue sur $I \times [a,b]$. Alors la fonction $g(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et pour $i \leq k$, $g^{(i)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)dt$.

Proposition 1.9.11 (Formule de Fubini)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([c,d] \times [a,b], E)$. Alors $\int_c^d \int_a^b f(x,t)dtdx = \int_a^b \int_c^d f(x,t)dxdt$.

1.10 Intégration sur un intervalle quelconque

Déf. et prop. 1.10.1 (Intégrales impropres sur $\mathbb{R}_+$)

- Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}(I,\mathbb{R}_+)$. f est intégrable sur I ssi existe $(J_n) \in \mathcal{P}(I)^{\mathbb{N}}$ une suite croissante de segments tq $\cup_n J_n = I$ telle que $(\int_{J_n} f)$ est majorée (on parle de suite de segments convenable pour I) ; on note alors $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_{J_n} f$.
- Soient $f,g \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}(I,\mathbb{R}_+)$ tq $f \leq g$. Alors si g est intégrable, f l'est.
- Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}([a,b[,\mathbb{R}_+)$. f est intégrable sur $[a,b[$ si la fonction $x < b \to \int_{[a,x]} f$ a une limite en b.

Déf. et prop. 1.10.2 (Intégrales impropres sur $\mathbb{K}$)

- Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}(I,\mathbb{K})$. On dit que f est intégrable sur I ssi $|f|$ est intégrable sur I.
- Si $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}(I,\mathbb{K})$, alors pour toute suite de segments (J_n) convenable pour I, la suite $(\int_{J_n} f)$ est convergente et sa limite ne dépend pas de (J_n) : on l'appelle intégrale sur I de f.
- Théorème de comparaison. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}(I,\mathbb{K})$ et $\phi \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}(I,\mathbb{R}_+)$ tq $\forall x \in I$, $|f(t)| \leq \phi(t)$. Alors si ϕ est intégrable sur I, f l'est et : $\left|\int_I f\right| \leq \int_I \phi$.

Théorème 1.10.3 (Comparaison asymptotique)

- *Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}([a,b[,\mathbb{K})$ et $\phi \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}([a,b[,\mathbb{R}_+)$ intégrable. Si $f = O_b(\phi)$ alors f est intégrable sur $[a,b[$.*
- *Soient $\phi,\psi \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}([a,b[,\mathbb{R}_+)$. Si ψ est intégrable sur $[a,b[$ et $\phi = O_b(\psi)$ (resp $\phi \sim_b \psi$, $\phi = o_b(\psi)$), alors ϕ est intégrable et $\int_x^b \phi(t)dt = O_b(\int_x^b \psi(t)dt)$ (resp $\sim_b$, o_b).*
- *Soient $\phi,\psi \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}([a,b[,\mathbb{R}_+)$. Si ψ n'est pas intégrable sur $[a,b[$ et $\phi \sim_b \psi$ (resp $\phi = O_b(\psi)$, resp $\phi = o_b(\psi)$), alors ϕ n'est pas intégrable et $\int_a^x \phi(t)dt \sim_b \int_a^x \psi(t)dt$ (resp O_b, o_b).*

Théorème 1.10.4
Soit I un intervalle borné ; soit $(f_n) \in \mathcal{C}^0(I,E)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur I, qui cvu vers f. Alors f est continue, intégrable sur I, et la suite (f_n) converge en moyenne vers f ie. $\int_I f_n \to \int_I f$.

Proposition 1.10.5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient $f,\ g \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}(I,\mathbb{K})$ de carré intégrable. Alors $\overline{f}g$ est intégrable et on a : $\left|\int_I \overline{f}g\right| \le (\int_I |f|^2)^{1/2}(\int_I |g|^2)^{1/2}$.

Théorème 1.10.6 (Convergence mononotone)
Soit $(f_n) \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions intégrables sur I et simplement convergentes vers une fonction f supposée $\mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}$. Alors f est intégrable sur I ssi la suite $(\int_I f_n)$ est majorée et dans ce cas $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$.

Théorème 1.10.7 (Convergence dominée)
Soit $(f_n) \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur I et simplement convergentes vers une fonction f supposée $\mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}$. S'il existe $\phi \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}(I,\mathbb{R}_+)$ intégrable et telle que $\forall (n,t) \in \mathbb{N}\times I,\ |f_n(t)| \le \phi(t)$, alors f est intégrable sur I et $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$.

Théorème 1.10.8 (Continuité sous le signe somme)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(A\times I,\mathbb{K})$ telle que $\forall x \in A$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ soit intégrable sur I. On pose $g(x) = \int_I f(x,t)dt$. En supposant de plus que $\forall K \subseteq A$ compact il existe $\phi_K \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}(I,\mathbb{R}_+)$ intégrable sur I tq $\forall (x,t) \in K\times I,\ |f(x,t)| \le \phi_K(t)$. Alors g est continue sur A.

Théorème 1.10.9 (Dérivation sous le signe somme)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(A\times I,\mathbb{K})$ une fonction admettant une dérivée partielle par rapport à x continue sur $A\times I$, telle que $\forall x \in A$ les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ soient intégrables sur I. On pose $g(x) = \int_I f(x,t)dt$. On suppose qu'en outre, $\forall K \subseteq A$ compact il existe $\phi_K \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}(I,\mathbb{R}_+)$ intégrable sur I tq $\forall (x,t) \in K\times I,\ |f(x,t)| + \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le \phi_K(t)$. Alors g est $\mathcal{C}^1$ sur A et de plus $g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

Déf. et prop. 1.10.10 (Fonction Gamma)
On définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ pour $x > 0$. Cette fonction est $\mathbb{C}^\infty$ et convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$. On a en outre $\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et pour $n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n+1) = n!$.

1.11 Séries de fonctions

Déf. et prop. 1.11.1 (Convergence normale)

- Une série de fonctions bornée $\sum f_n$ est dite normalement convergente si la série $\sum_n \|f_n\|_\infty$ est convergente.
- $\sum f_n$ est normalement convergente sur A ssi il existe une suite $(\alpha_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in A,\ \|f_n(x)\| \le \alpha_n$ et $\sum \alpha_n$ est convergente.
- Convergence normale $\Longrightarrow$ convergence uniforme $\Longrightarrow$ convergence simple.

Théorème 1.11.2 (Continuité de la limite)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues convergeant uniformément sur A vers f (resp. cvs sur A avec convergence uniforme sur tout segment contenu dans A si $A \subseteq R$) alors f est continue sur A.

Théorème 1.11.3 (Interversion des limites)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions convergeant uniformément sur A vers f, et soit $a \in \overline{A}$. On suppose que $\forall n, \lim_{x\to a} f_n = l_n$ (la limite existe) ; alors $\sum l_n$ converge, f a une limite en a, et $\sum_{n=0}^\infty \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \sum_{n=0}^\infty f_n(x)$.

Théorème 1.11.4 (Interversion des signes somme)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions $\mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}([a,b],E)$ qui cvu vers $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}([a,b],E)$ alors la série $\sum_n \int_a^b f_n(x)dx$ est convergente vers $\int_a^b f(x)dx$.

Théorème 1.11.5 (Primitivation)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur un intervalle I non trivial et $a \in I$. On note $h_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$ la primitive de f_n s'annulant en a. En supposant que $\sum f_n$ a pour limite simple f, la convergence étant uniforme sur tout segment $\subseteq I$, alors la série de fonctions $\sum_n h_n$ cvs sur I vers $h = \int_a^x f(t)dt$ la primitive de f s'annulant en a, la convergence étant uniforme sur tout segment $\subseteq I$.

Théorème 1.11.6 (Dérivation)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, convergent simplement vers f sur un I. On suppose que $\sum f_n'$ cvs vers g sur I, avec cvu sur tout segment $\subseteq I$. Alors f est $\mathcal{C}^1$ est $f' = g$.

Théorème 1.11.7 (Convergence monotone)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions $\mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}(I,\mathbb{R}_+)$ intégrables sur I et simplement convergente vers $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}(I,\mathbb{R}_+)$. La fonction f est intégrable ssi la série $\sum_n \int_I f_n$ est convergente (ie majorée) et dans ce cas $\int_I f = \sum_{n=0}^\infty \int_I f_n$.

Théorème 1.11.8
Soit $\sum f_n$ une suite de fonctions $\mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}(I,\mathbb{R})$ intégrables sur I, simplement convergente vers f supposée $\mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}$. Alors si $\sum_n \int_I |f_n|$ est convergente, f est intégrable et on a $\|f\|_1 \le \sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_1$ ainsi que $\int_I f = \sum_{n=0}^\infty \int_I f_n$.

1.12 Séries entières

Proposition 1.12.1 (Lemme d'Abel) Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tq la suite $a_n\rho^n$ soit bornée. Alors $\forall z \in \mathbb{K}$ tq $|z| < \rho$, la série $\sum_n a_n z^n$ est absolument convergente.

Déf. et prop. 1.12.2 (Rayon de convergence)

- Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière. Il existe un unique élément de $\overline{\mathbb{R}}$ noté R, appelé rayon de convergence de la série entière et ayant la propriété : $\forall z \in \mathbb{K},\ |z| < R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ est abs. cv. et $\forall z \in \mathbb{K},\ |z| > R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ diverge.
- Règle de d'Alembert : Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \ne 0$. Alors si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ alors le rayon de convergence de la série vaut $1/l$.

Proposition 1.12.3 (Continuité)

- Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors il y a convergence normale donc uniforme sur tout disque fermé inclus dans le disque de convergence.
- On note $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ pour $|z| < R$. Alors f est continue sur le disque de convergence.

Propriétés 1.12.4 (Opérations élementaires)

- Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R et R'. Alors $\sum (a_n+b_n)z^n$ a un rayon de convergence $\ge \min\{R,R'\}$ avec égalité si $R \ne R'$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. $\sum \lambda a_n z^n$ a un rayon de convergence égal à R.
- Le produit de Cauchy $\sum_n (\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k})z^n$ des séries entières a un rayon de convergence $\ge \min\{R,R'\}$.

Déf. et prop. 1.12.5 (Série dérivée, primitive)
Soit $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ une série entière.

- On appelle série dérivée la série $\sum_{n\ge 1} n a_n z^{n-1}$ et série primitive une série de la forme $\alpha + \sum_{n\ge 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ $(\alpha \in \mathbb{K})$.

- Ces deux séries ont le même rayon de convergence que la série entière initiale.

Théorème 1.12.6 (Primitivation)
Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note $f(t)$ sa somme sur $]-R;R[$. La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ a pour rayon de convergence R et la somme de cette série est la primitive de f sur $]-R,R[$ s'annulant en 0.

Théorème 1.12.7 (Dérivation)
Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et f sa somme sur $]-R;R[$. Alors f est $\mathcal{C}^\infty(]-R,R[,\mathbb{K})$ et la dérivée $k$ième de f vérifie $\forall k \geq 1,\ \forall t \in]-R,R[,\ f^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n t^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} t^n$.

Déf. et prop. 1.12.8 (Développement en séries entières)
- Une fonction f est dit développable en série entière s'il existe $r > 0$ tel qu'il existe une série entière de rayon de convergence $R \geq r$ dont la somme coïncide avec f sur $]-r,r[$.
- Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$ alors elle est $\mathcal{C}^\infty(]-r,r[,\mathbb{K})$.
- Il y a unicité du développement en série entière de f.

Théorème 1.12.9
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(]-r,r[,\mathbb{K})$ est développable en série entière sur $]-r;r[$ ssi $\forall x \in]-r,r[,\ \lim_{n\to\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = 0$.

1.13 Séries de Fourier

Déf. et prop. 1.13.1 (Coefficients de Fourier)
- Dans la suite on note E l'ev des fonctions $\mathcal{C}^0_{\text{mx}}$ 2π-périodiques.
- On pose $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = 1/(2\pi)\int_0^{2\pi} f(t)\exp(-int)dt$
  $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = 1/\pi \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$
  $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = 1/\pi \int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$
  $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$
- Pour $n \in \mathbb{Z}$ l'application c_n est linéaire.
- $f \in E \Longrightarrow \overline{f} \in E$ et $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$
- Pour f paire, $b_n(f) = 0$, pour f impaire, $a_n(f) = 0$.
- Pour $f \in E$ et $a \in \mathbb{R}$, $c_n(f + a) = \exp(ina)c_n(f)$.

Proposition 1.13.2 (Coefficients de la dérivée)
Soit $f \in \mathcal{C}^1_{\text{mx}}$, continue et 2π-périodique. Alors $c_n(f') = inc_n(f)$. Pour f C^{k-1}, $\mathcal{C}^k_{\text{mx}}$, 2π-périodique, $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$.

Théorème 1.13.3 (Rieman-Lebesgue)
Soit $f \in E$ alors $\lim_{n\to\pm\infty} c_n(f) = 0$. Pour f C^{k-1}, $\mathcal{C}^k_{\text{mx}}$, 2π-périodique, $c_n(f) = o(1/n^k)$.

Déf. et prop. 1.13.4 (Produit scalaire)
- On note $D \subset \mathcal{C}^0_{\text{mx}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ les fonctions 2π-périodiques telles que $\forall (f,x) \in D \times \mathbb{R},\ \lim_{y\to x, y<x} f(y)$ (resp. $y > x$) existe et est noté $f(x_-)$ (resp. $f(x_+)$) et $f(x) = \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$.
- E est un sev de D.
- Pour $(f,g) \in D^2$ on pose $\langle f|g\rangle = 1/(2\pi)\int_0^{2\pi} \overline{f}g$. $(D, \langle|\rangle)$ est un préhilbertien. On note $\|.\|_2$ la norme associée (attention au facteur $1/(2\pi)$ par rapport à la norme 2 classique).
- La famille des $e_n = t \mapsto \exp(int)$ est orthonormée et pour $f \in D$, $c_n(f) = \langle e_n|f\rangle$.
- Avec $P_p = \text{vect}(e_1,\dots,e_p)$, on définit $S_p(f) = \sum_{n=-p}^{p} c_n e_n = \text{proj}_{P_p}(f)$.
- Inégalité de Bessel : $\forall p \in \mathbb{N},\ \|S_p(f)\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$.

Théorème 1.13.5 (Cv en moyenne quadratique)
Soit $f \in D$; alors $\lim_{p\to\infty} \|f - S_p(f)\|_2 = 0$.

Théorème 1.13.6 (Bessel-Parseval)
Soit $f \in D$; alors $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$. En corollaire on a l'injectivité de la fonction $D \to \ell^2,\ f \mapsto (c_n(f))$.

Théorème 1.13.7 (Convergence normale)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\mathcal{C}^1_{\text{mx}}$ et 2π-périodique ; alors la famille $(c_n(f))$ est sommable et la série de Fourier de f converge normalement vers f.

Théorème 1.13.8 (Dirichlet)
Soit $f \in \mathcal{C}^1_{\text{mx}}$ 2π-périodique ; alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$.

1.14 Systèmes différentiels

Dans cette section, E est un ev de dimension n, Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $f : \Omega \to E$.

Définitions 1.14.1
- Résoudre le système (E) $x' = f(t,x)$ c'est trouver les couples (I,ϕ) avec $\phi \in \mathcal{D}(I,R)$ tels que $\forall t \in I,\ \phi'(t) = f(t,\phi(t))$.
- Une solution (I,ϕ) de (E) est prolongeable s'il existe une solution (I',ψ) de (E) telle que $I \subsetneq I'$ et $\psi_{|I} = \phi$. Une solution non prolongeable strictement est dite maximale.

Proposition 1.14.2 (Equation différentielle autonome)
Si f ne dépend pas du temps, l'ensemble des solutions de (E) est invariant par translation, ie. en notant $\psi_\alpha : t \mapsto t + \alpha$, si (I,ϕ) est solution alors $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (\psi_{-\alpha}(I), \phi \circ \psi_\alpha)$ est solution de (E).

Théorème 1.14.3 (Solution de $X' = AX$)
Pour tout (t_0, X_0) il existe une unique solution maximale au système différentiel $X' = AX$ $(A \in M_n(\mathbb{K}))$; elle est définie sur tout $\mathbb{R}$ et $X(t) = \exp((t-t_0)A)X_0$.

Corollaire 1.14.4 L'ensemble des solutions de $X' = AX$ définies sur $\mathbb{R}$ est un sev de $\mathbb{K}^\mathbb{R}$ de dimension n.

1.15 Équations différentielles

Proposition 1.15.1 (Prolongement)
Soit $(E) : x' = f(t,x)$, $f \in \mathcal{C}^0(\Omega,\mathbb{R}^n)$, et (I,ϕ) une solution de E, avec $I =]a,b]$. Si ϕ a une limite finie en a, on peut prolonger ϕ en une solution de E sur $[a,b]$.

Proposition 1.15.2 (Diminution de l'ordre) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E^2$, $g \in \mathcal{C}^0(\Omega, E)$. On considère (E) : $x'' = g(t,x,x')$. Pour I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{S}ol(E,I) = \{\phi \in \mathcal{D}^2(I,R) \,|\, \phi \text{ solution de } E\ \}$. On pose f : $\Omega \to E,\ (t,x,x') \mapsto x'$, et $(S_E) : (x',y') = (f,g)(t,x,y)$. Alors l'application $\mathcal{S}ol(S_E,I) \to \mathcal{S}ol(E,I),\ (\phi,\psi) \mapsto \phi$ est bien définie et bijective.

Théorème 1.15.3 (Cauchy-Lipschitz)
On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, E)$ et (E) : $x' = f(t,x)$. Pour tout $(t_0,x_0) \in \Omega$, il existe $\alpha > 0$ tel qu'une solution à (E) vérifiant $\phi(t_0) = x_0$ existe sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ et qu'elle soit unique.

Corollaire 1.15.4 Si f est $\mathcal{C}^1$, toute solution maximale a un intervalle de définition ouvert.

Corollaire 1.15.5 (HP) Dans les hypothèses du théorème, deux solutions (I,ϕ) et (I,ψ) de $(E) : x' = f(t,x)$ coincidant en un point sont égales.

Théorème 1.15.6 (Cauchy-Lipschitz global)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}\times E$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, E)$, $(E) : x' = f(t,x)$ et $(t_0,x_0) \in \Omega$. Alors il existe une unique solution au problème de Cauchy.

Dans la suite, on s'intéresse aux *équations différentielles linéaires* : E désigne un evn de dimension finie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in F(I,\mathcal{L}(E)) \times F(I,E)$, $(E) : x' = [a(t)](x) + b(t)$ et $(H) : x' = [a(t)](x)$.

Proposition 1.15.7 Soit J un intervalle contenu dans I. $\mathcal{S}ol(H,J)$ est un sev de $F(J,E)$. $\mathcal{S}ol(E,J)$ est un sous espace affine de $F(J,E)$ et pour $\phi \in \mathcal{S}ol(E,J)$, on a $\mathcal{S}ol(E,J) = \phi + \mathcal{S}ol(H,J)$.

Théorème 1.15.8 (Cauchy)
Si (a,b) sont continues sur I, pour $(t_0,x_0) \in I \times E$, il existe une unique solution ϕ définie sur I telle que $\phi(t_0) = x_0$. Autrement dit, E et $\mathcal{S}ol(I,E)$ sont isomorphes par $\mathcal{S}ol(I,E) \to E$, $x \to x(t_0)$ pour un t_0 quelconque dans I.

Désormais, $E = \mathbb{R}^n$, et $(A,B) \in \mathcal{C}^0(I,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Déf. et prop. 1.15.9 (Wronskien)
- On appelle système fondamental de solutions de (E) toute base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}ol(I,E)$.
- Soit $(X_i) \in (\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}^n))^n$ solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1. On appelle wronskien de (X_i) le déterminant $W(t) = \det(X_1(t),\dots,X_n(t))$.
- Soient $(X_1,\dots,X_n) \in \mathcal{S}ol(I,E)^n$. Alors $X_1,\dots,X_n$ est un système fondamental de solution $\iff \exists t \in I$ tq $W(t) \neq 0$.
- Dans le cas où $E = \mathbb{R}$ et où (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre p, on passe à une équation différentielle (E_1) d'ordre 1 avec $E_1 = \mathbb{R}^p$ comme dans 1.15.2 et on a alors, avec $(v_1,\dots,v_p) \in \mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})^p$ une famille de solutions de (E),

$$W(v_1,\dots,v_p)(t) = \det\begin{pmatrix} v_1(t) & \dots & v_p(t) \\ \vdots & v_j^{(i)} & \vdots \\ v_1^{(p)}(t) & \dots & v_p^{(p)}(t)\end{pmatrix}$$

1.16 Calcul différentiel

Déf. et prop. 1.16.1 (Différentiabilité)
- Soit E un evn, U un ouvert de E, $f : U \to F$ et $a \in U$. On dit que f est différentiable en a s'il existe $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ tq $f(a+h) = f(a) + u(h) + o(\|h\|)$. u est appellée application linéaire tangente.
- Il existe au plus une application linéaire tangente à f en a, qu'on appelle différentielle de f en a et qu'on note $df(a)$.
- Lorsque f est différentiable en tout point de U, on dit qu'elle est différentiable sur U, et l'application $U \to \mathcal{L}_c(E,F)$, $x \mapsto df(x)$ est appellée application différentielle de f.
- La différentiabilité implique la continuité.

Déf. et prop. 1.16.2 (Dérivées partielles)
- Soit $h \in E$; par définition d'un ouvert, si $a \in U$, il existe r tel que $I_r =]a - r \times h; a + r \times h[\subseteq U$. Si $\phi_{a,h} :]-r,r[\to E, t \mapsto f(a+th)$ est dérivable en 0, on dit que f a une dérivée suivant h en a, qu'on note $D_h f(a) = \frac{\partial f}{\partial h}(a) = \phi'_{a,h}(0)$.
- On appelle dérivées partielles de f en a les dérivées en a selon les vecteurs $(e_1,\dots,e_p)$ (qui forment une base de E).
- Si $f : U \to F$ est différentiable en a alors f est dérivable selon tout vecteur en a et pour $h \in E$, $df(a)(h) = D_h f(a)$.

Définition 1.16.3 On dit que f est continûment différentiable (ou $\mathcal{C}^1$) sur U lorsque f est différentiable en tout point selon tout vecteur et que pour tout $h \in U$, l'application $D_h f$ est continue.

Théorème 1.16.4 (Fondamental)
Soient $f : U \to F$, $(e_1,\dots,e_p)$ une base de E. Si f a en tout point de U des dérivées partielles et que les fonctions $D_{e_i} f$ sont continues sur U alors f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 1.16.5 (HP) f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U \iff$ (f est différentiable sur U et l'application $x \mapsto df(x)$ est continue).

Propriétés 1.16.6
- Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,V)$ ($V \subseteq F$ un sev de dim finie), et $g \in \mathcal{C}^1(V,G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^1(U,G)$ et $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$
- En particulier, si $U = I$ un intervalle de R, $d(f \circ \phi)(x) = df(\phi(x)) \circ \phi'(x)$.
- $\mathcal{C}^1(U,F)$ est un sev de F^U.
- Soit $f \in F(U,F)$, $(v_1,\dots,v_n)$ une base de F. On pose $f_i = v_i^* \circ f$, de sorte que $f(x) = \sum_i f_i(x) v_i$. Alors : $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$ ssi $\forall i$, $f_i \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$. Si c'est le cas, $D_h f_i(x) = v_i^* \circ D_h f(x)$ et $df_i(x)(h) = v_i^* \circ d_f(x)(h)$.
- Cas $F = \mathbb{R}$. $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ est une sous algèbre de $F(U,\mathbb{R})$ et on a, pour $(f,g) \in \mathcal{C}^1(U,R)$, $d(f \times g)(x)(h) = df(x)(h) \times g(x) + f(x) \times dg(x)(h)$. De plus si g est non nulle sur U, $f/g \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $d(f/g)(x)(h) = g(x)^{-2}(df(x)(h) \times g(x) - f(x) \times dg(x)(h))$.

Déf. et prop. 1.16.7 (Jacobi)
- Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$ et (V_i) (resp. (W_j)) une base de E (resp. F). On note $J_f(x) = \mathrm{mat}_{V,W}\, df(x)$.

$$j_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(x) \\ \vdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(x)\end{pmatrix}$$

- Lorsque $E = F$ la matrice jacobienne est carrée, son déterminant, appelé jacobien de f est noté $J_f(x)$.
- Composition. $j_{g\circ f}(x) = j_g(f(x)) \cdot j_f(x)$. C'est à dire : $D_j(g \circ f)_i(x) = \sum_{k=1}^n D_k g_i(f(x)) \cdot D_j f_k(x)$.

Déf. et prop. 1.16.8 (Difféomorphismes)
- Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,V)$ (V ouvert de F). Si f est bijective et que $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(V,U)$, f est un difféomorphisme de U sur V.
- Si $f : U \to V$ est un difféomorphisme alors $\forall x \in U$, $df(x)$ est un isomorphisme.
- En particulier, ceci impose $\dim E = \dim F$. On a alors $J_f(x) \neq 0$.

Théorème 1.16.9 (Carac. des difféomorphismes)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$ (U ouvert de E) injective. Alors $f(U)$ est ouvert et f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $f(U)$ ssi $\forall x \in U$, $df(x)$ est un isomorphisme (ie $\dim F = \dim E$ et $0 \notin J_f(U)$).

Déf. et prop. 1.16.10 (Classe $\mathcal{C}^k$)
- $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$ est dite de classe $\mathcal{C}^2$ si $\forall j \in [\![1,p]\!],\ D_j f \in \mathcal{C}^1(U,F)$.
- Théorème de Schwarz : pour $f \in \mathcal{C}^2(U,F)$, $D_iD_jf = D_jD_if$.
- Une fonction $f \in \mathcal{C}^{k-1}(U,F)$ dont les dérivées partielles d'ordre $k-1$ sont $\mathcal{C}^1$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$.
- Si $g \in \mathcal{C}^k(U,V),\ f \in \mathcal{C}^k(V,F)$ alors $f \circ g \in \mathcal{C}^k(U,F)$.
- Théorème de Schwarz généralisé : les D_j commutent sur $\mathcal{C}^k$.
- On appelle $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme une bijection $\mathcal{C}^k$ dont la réciproque est aussi $\mathcal{C}^k$.

Théorème 1.16.11 (Carac. $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes)
Soit $f \in \mathcal{C}^k(U,F)$. f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U sur $f(U$ ssi elle est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Déf. et prop. 1.16.12 (Gradient)
- Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$. Pour $x \in U$, il existe un unique vecteur de E appelé gradient et noté $\overrightarrow{\text{grad}} f(x)$ ou $\nabla f(x)$ tel que $\forall h \in E,\ df(x)(h) = \langle \overrightarrow{\text{grad}} f(x) | h \rangle$.
- Soit $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de E. Alors pour $f \in \mathcal{C}^1(U,R)$, $\nabla f(x) = \sum_{j=1}^p D_j f(x) e_j$.

Proposition 1.16.13 (Inégalité de la moyenne)
Etant donnés U un ouvert connexe de E, et $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$, on a $\forall (a,b) \in U^2,\ |f(a) - f(b)| \le \sup_{[0,1]} |df(a+t(b-a))(b-a)|$

En particulier, si on suppose U est connexe (voire même connexe par arc) et $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$, alors f est constante ssi $df(U) = \{0\}$.

Théorème 1.16.14
Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$, U ouvert de E. Si f a un extrémum local en $x \in U$ alors x est un point critique (ie $df(x) = 0$).

Proposition 1.16.15 (Taylor-Young) Soit $f \in \mathcal{C}^2(U,R)$, U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $a \in U$. Alors

$$f(a+h) - f(a) - df(a)(h) - \frac{1}{2!} \sum_{1 \le i,j \le 2} D_iD_jf(a)h_ih_j = o(\|h\|^2)$$

Théorème 1.16.16 (C.S. d'extrémum)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U,R)$ U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et a un point critique de f. La formule de Taylor-Young donne : $f(a+h) = f(a) + Q(h) + o(\|h\|^2)$ où $Q(h) = \sum_i h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2\sum_{i<j} h_ih_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.

Si Q est une forme quadratique définie positive (resp. définie négative) alors f admet un minimum (resp. un maximum) relatif en a.

Corollaire 1.16.17 (C.S. d'extrémum en dimension 2)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U,R)$ U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et a un point critique de f. On note $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a),\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a),\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$. Si $rt - s^2 > 0$, f a un extrémum local en a (minimum local si $r > 0$ maximum local sinon). Si $rt - s^2 < 0$, f n'a pas d'extrémum local en a.

2 Algèbre

2.1 Arithmétique

Déf. et prop. 2.1.1 (Idéaux)
- Un idéal d'un anneau commutatif A est un sous groupe de $(A,+)$ stable par multiplication par tout élément de A.
- L'image réciproque d'un idéal par un morphisme d'anneau est un idéal. En particulier, le noyau d'un morphisme d'anneau est un idéal (en fait, tous les idéaux sont de cette forme).
- Une intersection – finie ou infinie – d'idéaux est un idéal.
- Soient $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ deux idéaux. On note $\mathfrak{i} + \mathfrak{j} = \{x + y \mid (x,y) \in \mathfrak{i} \times \mathfrak{j}\}$; c'est un idéal. On définit ainsi par récurrence la somme de n idéaux.

Déf. et prop. 2.1.2 (Idéaux d'un anneau principal)
- On dit d'un anneau A qu'il est principal si tous ses idéaux sont de la forme xA (avec $x \in A$). $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$ sont principaux, c'est à dire que tout idéal de $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{K}[X]$) est de la forme $n\mathbb{Z}$ (resp. $P \times \mathbb{K}[X]$).
- Soit A intègre, $x \neq 0$ et $y \in A$. ($x \mid y$ et $y \mid x$) $\iff$ $\exists u$ inversible , $y = ux$; y et x sont dits associés. (Remarquez que $x \mid y \iff x \in yA \iff xA \subseteq yA$. La proposition exprime que si $xA = yA$, $y = ux$ avec u inversible).

Définition 2.1.3 (Pgcd, ppcm)
- La relation $a \diamond b \iff a$ est associé à b est une relation d'équivalence, dont l'ensemble des classes est noté $A/\diamond$. J'appelle fonction de normalisation une application injective $N : A/\diamond \to A$ telle que $N(ab) = N(a)N(b)$ et $N(1) = 1$. (Attention cette appelation est personnelle !).
- Soit A un anneau principal, N une normalisation, et $a_1, \dots, a_n \in A$. On note $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n) = N(\delta)$ où δ est tel que $\delta A = \sum_{i=1}^n a_i A$. On note $\text{ppcm}(a_1, \dots, a_n) = N(\delta)$ où δ est tel que $\delta A = \bigcap_{i=1}^n a_i A$.
- Plus concrètement, $\mathbb{Z}$ peut être muni de la normalisation $N(x) = |x|$; pour $\mathbb{K}[X]$, on peut choisir $N(P) = P/a_n$ (où a_n est le coefficient dominant de P). On retrouve alors les définitions de ppcm et pgcd habituelles.

Propriétés 2.1.4 Dans la suite, A est un anneau principal muni d'une normalisation.
- Théorème de Bézout : $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n) = 1 \iff$ il existe $v_1, \dots, v_n$ tel que $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 1$.
- Si $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $\forall i \neq j$, $\text{pgcd}(a_i, a_j) = 1$, alors, $\text{ppcm}(a_1, \dots, a_n) = N(a_1 \dots a_n)$.
- Lemme de Gauss : si $a \mid bc$ et $\text{pgcd}(a,b) = 1$, alors $a \mid c$.
- Si $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(a,c) = 1$ alors $\text{pgcd}(a,bc) = 1$.

Déf. et prop. 2.1.5 (Anneau quotient)
- Soit A un anneau commutatif, $\mathfrak{i}$ un idéal de A. Alors la relation $a \equiv b \iff a - b \in \mathfrak{i}$ ($a, b \in A$) est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont de la forme $\overline{a} = a + \mathfrak{i}$ (où $a \in A$) et leur ensemble muni des lois $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$ et $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \times b}$ est aussi un anneau.
- La surjection canonique $\Pi : A \to A/\mathfrak{i},\ a \mapsto \overline{a}$ est un morphisme d'anneau.

Exemple 2.1.6 En prenant $A = \mathbb{Z}$ et $\mathfrak{i} = n\mathbb{Z}$ on construit l'anneau des entiers modulo n, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On peut mettre cette ensemble en bijection avec $[\![0, n-1]\!]$, avec les règles de calcul modulo n.

Propriétés 2.1.7
- Pour $m \in \mathbb{Z}$, $\overline{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible ssi $m \wedge n = 1$. On déduit de cela que $Z/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est premier.

- Théorème Wilson : n est premier ssi $(n-1)! \equiv -1[n]$.
- Lemme chinois : pour $(m,n) \in \mathbb{Z}$, premiers entre eux, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$. Autrement dit un système de congruence $x \equiv a\ [n],\ x \equiv b\ [m]$ a au moins une solution, et si on en connait une les autres sont de la forme $x + mnk$ $(k \in \mathbb{Z})$.
- Indicateur d'Euler : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\phi(n)$ le nombre d'éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si $m \wedge n = 1$, $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$.

Remarque 2.1.8 La première propriété énoncée vaut aussi pour $\mathbb{K}[X]$: $\mathbb{K}[X]/(P)$ est un corps ssi P est irréductible. Sa dimension comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel est $\deg P$. L'application $\mathbb{K} \to \mathbb{K}[X]/(P), a \mapsto \overline{a}$ est un morphisme injectif de corps, et le polynôme $\overline{P}$ a une racine dans $\mathbb{K}[X]/(P)$ (c'est $\overline{X}$). Ainsi, par récurrence, pour $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe une extension de corps dans laquelle P est scindé.

2.2 Groupes

Théorème 2.2.1 (Isomorphisme)
Soient G et H des groupes, et ϕ un morphisme de G dans H. Alors $\mathrm{Im}\ \phi \simeq G/\operatorname{Ker}\phi$.

Déf. et prop. 2.2.2 (Ordre d'un élément)
- Soit G un groupe et $a \in G$. L'application $\gamma_a : \mathbb{Z} \to G,\ k \mapsto a^k$ est un morphisme de groupe. On note $\mathrm{gr}(a) = \mathrm{Im}\ \gamma_a$ le sous groupe engendré par a.
- Par théorème d'isomorphisme, soit $\mathrm{gr}(a)$ est fini d'ordre n, et isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, soit il est infini isomorphe à $\mathbb{Z}$.
- Un groupe G est dit monogène s'il est égal à $\mathrm{gr}(a)$ pour un certain $a \in G$. S'il est fini, il est dit cyclique. Le point précédent montre qu'un groupe monogène est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Définition 2.2.3 (Groupe engendré)
Soit G un groupe, et $A \subseteq G$. L'intersection des sous-groupes de G contenant A est appelé sous groupe engendré par A noté $\mathrm{gr}(A)$; c'est un sous groupe de G contenant A.

$\mathrm{gr}(A)$ est aussi l'ensemble de produits finis d'éléments de A ou d'inverses d'éléments de A.

Théorème 2.2.4 (Lagrange)
L'ordre de tout sous groupe d'un groupe fini divise l'ordre du groupe. En particulier l'ordre de tout élément divise l'ordre du groupe, ie $\forall a \in G,\ a^{\mathrm{Card}\, G} = e$.

Corollaire 2.2.5 (Petit théoreme de Fermat)
Si p est premier, $\forall \overline{a} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ \overline{a}^{p-1} = \overline{1}$, car le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est d'ordre $p-1$. En fait le théorème d'Euler généralise ce résultat : $\forall \overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \overline{a}^{\phi(n)} = \overline{1}$ (conséquence immédiate de 2.2.4 et de 2.1.7).

Déf. et prop. 2.2.6 (Action de groupe)
- On appelle action (ou opération) de groupe toute application $G \times X \to X,\ (g,x) \mapsto g \cdot x$ telle que $\forall (g,h,x) \in G^2 \times X,\ g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ et $\forall x \in X,\ e \cdot x = x$.
- Soit G un groupe opérant sur X. L'application $\sigma(g) : X \to X,\ x \mapsto g \cdot x$ est une permutation de X. L'application σ est un morphisme de G dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}(X)$.
- La relation $x \sim y \iff \exists g \in G,\ x = g \cdot y$ est une relation d'équivalence. La classe de x, notée G_x est appelée orbite de x.
- L'ensemble $S_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ pour $x \in X$ est appelé stabilisateur de x. C'est un sous groupe de G et on a $\mathrm{Card}\, G = \mathrm{Card}\, G_x \,\mathrm{Card}\, S_x$.

Théorème 2.2.7 (Equation aux classes)
Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini X. Soit Θ une partie contenant un représentant de chaque orbite. Alors : $\mathrm{Card}\, X = \sum_{x \in \Theta} \frac{\mathrm{Card}\, G}{\mathrm{Card}\, S_x}$

2.3 Algèbre générale

Déf. et prop. 2.3.1 (Caract. d'un anneau comm.)
- Soit A un anneau commutatif. L'application $\mathbb{Z} \to A,\ k \to k \cdot 1$ est le seul morphisme de $\mathbb{Z}$ dans A ; son noyau est de la forme $n\mathbb{Z}$ pour un unique $n \in \mathbb{N}$ appelé caractéristique de A.
- La caractéristique d'un anneau intègre est soit 0 soit un nombre premier.

Déf. et prop. 2.3.2 (Polynômes annulateurs)
- Soit A une K-algèbre non nulle et $a \in A$. L'application $\phi_a : \mathbb{K}[X] \to A,\ \sum_i b_i X^i \mapsto \sum_i b_i a^i$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre. Son image est notée $\mathbb{K}[a]$; son noyau est l'ensemble des polynômes annulateurs de A qui forme un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Quand $\operatorname{Ker}\phi_a$ est non nul, on appelle polynôme minimal de A et on note π_a son unique générateur unitaire.
- Il existe un polynôme annulateur non nul de a de degré $\leq n \iff (e, a, \ldots, a^n)$ est liée. Si π_a, existe, en notant $n = \deg \pi_a$, la famille $(e, a, \ldots, a^{n-1})$ est une base de $\mathbb{K}[a]$.
- Si P annule a, est irréductible et unitaire, alors $P = \pi_a$.
- Réciproquement si A *est intègre*, π_a est irréductible.
- Supposons $\dim \mathbb{K}[a] < +\infty$. Alors : $P(a)$ est inversible $\iff P \wedge \pi_a = 1$ et dans ce cas $P(a)^{-1} \in \mathbb{K}[a]$.
- En combinant les deux résultats précédents, on montre que si A est intègre et si $\dim \mathbb{K}[a] < +\infty$ alors $\mathbb{K}[a]$ est un corps.

2.4 Réduction des endomorphismes

Théorème 2.4.1 (Décomposition des noyaux)
Soient $(P_1, ..., P_n) \in \mathbb{K}[X]^n$ premiers entre eux deux à deux, $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\operatorname{Ker}(\prod_{i=1}^n P_i)(u) = \bigoplus_{i=1}^n \operatorname{Ker} P_i(u)$

Déf. et prop. 2.4.2 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
- $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u ssi $u - \lambda Id$ n'est pas injectif, c'est à dire qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tq $u(x) = \lambda x$. On dit que x est un vecteur propre associé à λ. On note $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda Id)$ l'espace propre associé à la vp λ (cet espace est stable par u). L'ensemble des valeurs propres de u est noté $\mathrm{Sp}\, u$.
- Si λ est vp de u associée à x, λ^n est vp de u^n associée à x. Plus généralement, pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\lambda)$ est vp de $P(u)$ associée à x.
- Toute racine du polynôme minimal est valeur propre de u. Réciproquement, si $\lambda \in \mathrm{Sp}\, u$ et $P(u) = 0$, alors $P(\lambda) = 0$.
- Soit $a \in GL(E)$. $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ si $\lambda \in \mathrm{Sp}(aua^{-1})$. $E_\lambda(aua^{-1}) = a(E_\lambda(u))$.

Proposition 2.4.3 (Polynôme caractéristique)
- $\lambda \in \mathbb{K}$ est vp de $u \in \mathcal{L}(E)$ ssi $\det(u - \lambda Id) = 0$.
- La fonction $\mathbb{K} \to \mathbb{K}, \lambda \mapsto \det(u - \lambda Id)$ est polynomiale en λ de degré n. Le coefficient de λ^n est $(-1)^n$, celui de λ^{n-1} est $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} u$ et le terme constant est $\det u$.
- Deux matrices semblables ont le même polynome caractéristique.

Propriétés 2.4.4 – On note m_λ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de χ_u. On a $\dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$.
- Lorsque χ_u est scindé, les relations entre coefficients et racines donnent $\operatorname{tr} u = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda \lambda$ et $\det u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda^{m_\lambda}$.
- Si les E_i sont des espaces stables par u tels que $\bigoplus_{i=1}^r E_i = E$ alors $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^r \chi_{u_i}(X)$ en notant $u_i \in \mathcal{L}(E_i)$ la restriction de u à E_i.

Théorème 2.4.5 (Cayley-Hamilton)
Le polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$ est annulateur de u.

Proposition 2.4.6 (Diagonalisation) Les assertions suivantes sont équivalentes (E désigne un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n) :

(i) $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable.
(ii) il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.
(iii) $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda$.
(iv) il existe une décomposition de E en somme directe de sev stables par u sur chacun desquels u induit une homothétie.
(v) $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = n$.
(vi) χ_u est scindé et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ m_\lambda = \dim E_\lambda(u)$.
(vii) il existe un polynome annulateur de u scindé et à racines simples.

Proposition 2.4.7 (Trigonalisation) $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si $\chi_u(X)$ est scindé ssi il existe un polynôme annulateur scindé. En particulier, toute matrice à coefficients dans un corps algébriquement clot ($\mathbb{C}$ par exemple) est trigonalisable.

2.5 Formes quadratiques

Dans toute la suite, on suppose que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique différente de 2.

Déf. et prop. 2.5.1
- Une forme bilinéaire est une application $\phi : E \times F \to \mathbb{K}$ (où E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev) telle que $\forall (x,y) \in E \times F$, les applications $\phi_x : y \mapsto \phi(x,y)$ et $\phi_y : x \mapsto \phi(x,y)$ soient linéaires. Dans la suite, $E = F$.
- Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E ; soient $x, y \in E$ et X, Y les vecteurs coordonnées associés dans B. Alors $\phi(x,y) = {}^tXMY$ avec $M = (\phi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$. En particulier, $q(x) = {}^tXMX$.
- L'application qui associe à une forme bilinéaire sa matrice dans une base donnée est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- Une forme quadratique est une application du type $q : E \to \mathbb{K},\ x \mapsto \phi(x,x)$ où ϕ est une forme bilinéaire symétrique. ϕ est appelée forme polaire associée à q.
- On appelle matrice de q la matrice de sa forme polaire ; on appelle rang de q le rang de cette matrice.

Propriétés 2.5.2 (Polarisation) Étant donnée une forme quadratique q, l'application définie par $\phi(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y)) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ est une application bilinéaire symétrique telle que $\phi(x,x) = q(x)$.

Proposition 2.5.3 (Isomorphismes) L'application qui a une forme bilinéaire symétrique ϕ associe la forme quadratique $q : x \mapsto \phi(x,x)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Théorème 2.5.4 (Loi d'inertie de Sylvester)
Pour toute décomposition d'une forme quadratique de la forme $q(x) = \sum_{i=1}^r |g_i(x)|^2 - \sum_{j=1}^s |f_j(x)|^2$, où les $(g_i), (f_j)$ sont des formes linéaires linéairement indépendantes, les entiers (r,s) sont égaux, et on appelle signature de q le couple (r,s). On a alors $r + s = \operatorname{rg} q$.

Théorème 2.5.5 (Inégalité de Schwarz)
Si q est une forme quadratique positive (ie. $q(x) \geq 0$ pour tout x), alors $\forall (x,y) \in E^2,\ |\phi(x,y)|^2 \leq q(x)q(y)$.

2.6 Espaces préhilbertiens

Dans la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.6.1 (Produit scalaire) On appelle produit scalaire sur E un $\mathbb{K}$-ev une application $\phi : E \times E \to \mathbb{K}$ linéaire à droite (ie. $\forall x \in E,\ \phi_x : y \to \phi(x,y)$ est linéaire), à symétrie hilbertienne ($\phi(x,y) = \overline{\phi(y,x)}$) et telle que $\forall x \in E,\ x \neq 0 \mapsto \phi(x,x) > 0$.

Proposition 2.6.2 (Inégalités) Soit $(E, \langle | \rangle)$ un préhilbertien, on note $\|x\| = \langle x|x \rangle^{1/2}$.
- Cauchy-Schwarz : $\forall (x,y) \in E^2,\ |\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$.
- Minkowski : $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$; corollaire : $\|.\|$ est une norme.

Proposition 2.6.3 Pour $x \in E$, on pose $\phi_x(y) = \langle x|y \rangle$, c'est une forme bilinéaire continue. On a alors : $\|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle x|y \rangle|$, et donc $\forall u \in \mathcal{L}_c(E)$, $|||u||| = \sup_{\|y\| \leq 1,\ \|x\| \leq 1} |\langle u(x)|y \rangle|$.

Propriétés 2.6.4 (Égalités) Identités de polarisation :
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x|y \rangle$
$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x|y \rangle$
$4\langle x|y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \times \mathrm{Re}\langle x|y \rangle$
$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \times \mathrm{Re}\langle x|y \rangle$
$4\langle x|y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|y+ix\|^2 - i\,\|y-ix\|^2$
Identité du parallélogramme : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$

Déf. et prop. 2.6.5 (Orthogonalité)
- Une famille $(e_i) \in \mathbb{R}^I$ orthogonale (ie. $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \implies \langle e_i|e_j \rangle = 0$) ne contenant pas le vecteur nul est libre.
- Orthogonal d'une partie : $A^\perp = \{x \in E \,|\, \forall y \in A,\ \langle x|y \rangle = 0\} = \bigcap_{x \in A} \ker \phi_x$
- Deux sev orthogonaux sont en somme directe.
- F, G deux sev de E. Si $F \oplus G = E$, F et G sont supplémentaires orthogonaux ssi $G \subseteq F^\perp$ (ssi $F \subseteq G^\perp$) et alors $F = (F^\perp)^\perp$

Théorème 2.6.6 (Orthogonalisation de Gram-Schmidt)
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre d'un espace préhilbertien. Il existe une famille $(y_1, \ldots, y_n)$ orthonormale tq $\forall 1 \leq k \leq n$, $\mathrm{vect}(x_1, \ldots, x_k) = \mathrm{vect}(y_1, \ldots, y_k)$. (Autrement dit : pour toute famille libre il existe une famille orthonormale de même drapeau)

Proposition 2.6.7 (Orthogonalité en dim. finie) Soit E un préhilbertien de dimension finie.
- E admet une base orthonormale.

– Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale.
– Soit F un sev de E. $E = F \oplus F^{\perp}$.

Proposition 2.6.8 (En dimension quelconque)
– Soit F un sev de E de dimension finie, alors $E = F \oplus F^{\perp}$.
– Soit F un sev de E de dimension finie, $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de F, et p_F la projection orthogonale sur F. Alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle e_i | x \rangle e_i$.
– Corollaire : inégalité de Bessel : $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{r} |\langle e_i | x \rangle|^2$.

Théorème 2.6.9
Soit F un sev de dimension finie de E un préhilbertien et $x \in E$. Alors la fonction $y \to \|x - y\|$ pour $y \in F$ admet un minimum atteint en un unique point de F à savoir $y = p_F(x)$ on a alors $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$, et $\|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2$.

Théorème 2.6.10
Soit E un espace euclidien ou hermitien. L'application $f : E \to E^*$, $x \mapsto \phi_x$ est un isomorphisme d'espace vectoriels. Toute forme linéaire se met donc sous la forme $y \mapsto \langle a | y \rangle$ pour un unique a.

Déf. et prop. 2.6.11 (Adjoint) E est un espace euclien ou hermitien.
– $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \exists! u^* \in \mathcal{L}(E)$ tq $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u^*(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle$: c'est l'adjoint de u.
– L'application $f : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E),\ u \mapsto u^*$ est un automorphisme involutif (ie $f^2 = Id$) de $\mathcal{L}(E)$.
– Un sev F est stable par u ssi $F^{\perp}$ est stable par u^*
– $\mathrm{Ker}(u^*) = (\mathrm{Im} u)^{\perp}$; $\mathrm{Im}(u^*) = (\mathrm{Ker}^{u})^{\perp}$.
– Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et B une base orthonormée de E alors $\mathrm{mat}_E(u^*) = {}^t(\overline{\mathrm{mat}_E(u)})$.
– De ceci on tire : $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\, u^*$ et $\det u = \overline{\det u^*}$.

Déf. et prop. 2.6.12 (Endomorphismes autoadjoints) Soir E euclidien.
– Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $u = u^*$ est dit symétrique.
– Soit B une base orthonormée de E. Alors u est symétrique ssi $\mathrm{mat}_B(u)$ est symétrique.
– Un endomorphisme symétrique réel est diagonalisable dans une base orthonormale.
– Toute matrice symétrique à valeurs réeeles s'écrit $M = {}^tPDP$ où D est diagonale et P est une matrice orthogonale.
– Pour un endomorphisme symétrique on a : $|||u||| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle u(x) | x \rangle| = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} |\lambda|$ (rayon spectral de u).

Déf. et prop. 2.6.13 (Positivité, définition)
– Un endomorphisme d'un espace euclidien E est dit positif (resp. défini positif) si $\forall x \in E,\ x \neq 0 \mapsto \langle u(x) | x \rangle \geq 0$ (resp. > 0).
– E étant Euclidien, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $\in GL(E)$). Alors u^*u et uu^* sont des endomorphismes symétriques positifs (resp. définis positifs).
– Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est positif (resp. défini positif), alors $\mathrm{Sp}\, u \subseteq \mathbb{R}_+$ (resp. $\subseteq \mathbb{R}_+^*$).
– Réciproquement, si u est symétrique, il est positif si et seulement si $\mathrm{Sp}\, u \subseteq \mathbb{R}_+$.

Remarque 2.6.14 (HP) Tout endomorphisme symétrique positif est de la forme u^*u.

Proposition 2.6.15 (Endomorphime orthogonal) Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien. On dit qu'il est orthogonal s'il vérifie l'une des cinq assertions suivantes, qui sont équivalentes :
(i) $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$ (conservation du produit scalaire).
(ii) $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$ (conservation de la norme).
(iii) u est inversible et $u^{-1} = u^*$.
(iv) u transforme toute base orthonormée en une base orthonormée.
(v) dans toute base orthonormée B, $A = \mathrm{mat}_B(u)$ vérifie ${}^tAA = I_n$.

Proposition 2.6.16 (Matrices orthogonales) Une matrice est dite orthogonale si elle vérifie l'une des assertions suivantes, qui sont équivalentes :
(i) $A \in M_n(\mathbb{R})$ a pour endomorphisme canoniquement associé un automorphisme orthogonal.
(ii) Les vecteurs colonnes de A forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$
(iii) Les vecteurs lignes de A forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$
(iv) ${}^tAA = A{}^tA = I_n$.

Proposition 2.6.17 – Si B et B' sont deux bases orthonormées, la matrice de passage $P_{BB'}$ est orthogonale.
– Soit B une base orthonormée de E. $B' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ est orthonormée ssi $\mathrm{mat}_B(e'_1, \ldots, e'_n)$ est orthogonale.

3 Formulaire

3.1 Trigonométrie

Addition, duplication :

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\
\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\
\sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \\
\tan(a+b) &= (\tan(a)+\tan(b))/(1-\tan(a)\tan(b)) \\
\tan(a-b) &= (\tan(a)-\tan(b))/(1+\tan(a)\tan(b)) \\
\cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) \\
&= 2\cos^2(a) - 1 \\
\sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a)
\end{aligned}$$

Transformation tangente : $t = \tan(x/2)$

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= 2t/(1+t^2)\,;\ \cos(x) = (1-t^2)/(1+t^2) \\
\tan(x) &= 2t/(1-t^2)
\end{aligned}$$

Transformation de somme en produit :

$$\begin{aligned}
\sin(a)+\sin(b) &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
\sin(a)-\sin(b) &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
\cos(a)+\cos(b) &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
\cos(a)-\cos(b) &= -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)
\end{aligned}$$

Dérivées des fonctions réciproques :

$$\begin{aligned}
(\arcsin)'(x) &= 1/\sqrt{1-x^2} \\
(\arccos)'(x) &= -1/\sqrt{1-x^2} \\
(\arctan)'(x) &= 1/1+x^2
\end{aligned}$$

Divers :

$$\begin{aligned}
\arctan(x) + \arctan(1/x) &= \mathrm{sgn}(x)\times\pi/2 \\
\arcsin(x) + \arccos(x) &= \pi/2
\end{aligned}$$

3.2 Trigonométrie hyperbolique

Addition, duplication :

$$\begin{aligned}
\cosh(a+b) &= \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b) \\
\sinh(a+b) &= \cosh(a)\sinh(b) + \sinh(a)\cosh(b) \\
\cosh(2a) &= 2\cosh^2(a) - 1 \\
\sinh(2a) &= 2\sinh(a)\cosh(a)
\end{aligned}$$

Transformation tangente : $t = \tanh(x/2)$

$$\cosh(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}\ ;\ \sinh(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

3.3 Intégrales et primitives

Proposition 3.3.1 (Changements de variable)

- Règle de Bioche. $f(x) = F(\cos(x), \sin(x))$. Si f paire, on prend $u = \cos(x)$; si f est impaire, $u = \sin(x)$; si f T-périodique, $u = \tan(\pi x/T)$; sinon $u = tan(x/2)$.
- Fractions rationnelles de fonctions hyperboliques : le plus simple est souvent de prendre $u = \exp(x)$.
- Intégrales abéliennes. $f(x) = F(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$, on prend $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Proposition 3.3.2 (Fractions rationnelles)
On veut trouver une primitive de $F \in \mathbb{R}(X)$. F peut s'écrire comme somme d'un polynome et de morceaux de la forme : $\frac{1}{x-\alpha}$, $\frac{1}{(x-\alpha)^n}$, $\frac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b}$ et $\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^n}$.

Pour intéger ces morceaux on utilise les relations suivantes : $\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha|$; $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} = \frac{(x-\alpha)^{-n+1}}{-n+1}$. Pour calculer $\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b}dx$ on se ramène aux deux intégrales connues : $\int \frac{2x+a}{x^2+ax+b}dx = \ln\left|x^2+ax+b\right|$ et $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$. Pour intégrer $\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^n}dx$ on se ramène à deux intégrales du type : $\int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^n}dx = \frac{(x^2+ax+b)^{-n+1}}{-n+1}$ et $I_n = \int \frac{du}{(u^2+1)^n}$ qu'on calcule en intégrant par partie et en trouvant une formule de récurrence.

3.4 Développements limités

3.5 Séries entières

4 Démonstrations

Démonstration (Point fixe, 1.4.9) La fonction $x \in A \mapsto \phi(x) = \|f(x) - x\|$ est continue, prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et l'ensemble de départ est compact donc elle atteint son minimum $m = \phi(x_0)$. Si on suppose $m > 0$, ie $f(x_0) \neq x_0$, alors par hypothèse, $\phi(f(x_0)) = \|f(f(x_0)) - f(x_0)\| < \|f(x_0) - x_0\| = m$; ceci contredit la minimalité de m donc il existe x tq $f(x) = x$. Si y est tel que $f(y) = y \neq x$ alors $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| = \|f(x) - f(y)\|$; ceci est absurde donc le point fixe est unique. La convergence de la suite vers le pointt fixe se montre facilement en utilisant $\phi(u_n)$.

Démonstration (Darboux, 1.5.6) Soit $F : (x, y) \mapsto (f(x) - f(y))/(x - y)$, et soit $A = \{(x, y) \mid x > y\}$. L'ensemble $\Gamma = F(A) = \{(f(x) - f(y))/(x - y) \mid (x, y) \in [a, b]^2, x > y\}$ est connexe comme image d'un connexe (A est même convexe) par une fonction continue. Il est évident que $\Gamma \subseteq f'([a, b])$, en appliquant le théorème des accroissements finis. Et d'autre part, si on note $x_n = x + (b - x)/n$, $f'(x) = \lim_{n\to\infty} y_n$ avec $y_n = (f(x_n) - f(x))/(x_n - x) \in \Gamma$. Donc $\Gamma \subseteq f'([a, b]) \subseteq \bar{\Gamma}$. Comme Γ est connexe, ceci implique par théorème que $f'([a, b])$ est connexe, sachant que les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, on obtient le théorème.

Démonstration (Raab-Duhamel, 1.6.5) Notons $v_n = \ln(u_n/n^\alpha)$. On montre que $v_{n+1} - v_n = O(1/n^2)$ donc la série $\sum v_{n+1} - v_n$ a une limite, donc v_n a une limite, qu'on note l. Alors $e^{v_n} = u_n/n^\alpha \to e^l > 0$ d'où le résultat.