Condensé de cours MP

E.P. et R.D.

19 juillet 2003

Notations. Le complexe associé à x est noté $\underline{x}$.

La valeur moyenne de x est notée $\overline{x}$ ou $< x >$.

Lorsque la lettre i est déjà utilisée, on note j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

Quand la situation est sans ambiguité p, n, m sont des entiers.

Pour une surface fermée les vecteurs surface sont orientés de l'intérieur vers l'extérieur.

Une grandeur est dite uniforme lorsqu'elle ne dépend pas des variables d'espace.

Une grandeur est dite constante lorsqu'elle ne dépend pas de la variable temporelle.

1 Mecanique

1.1 Point Matériel

Définitions 1.1.1
- Grandeurs cinématiques. Vitesse de M dans (R) : $\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}_R$, accélération de M dans (R) : $\overrightarrow{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}_R$. Abscisse curviligne : s définie sur une courbe orientée munie d'une origine.
- Grandeurs cinétiques. Masse, quantité de mouvement du point M, de masse m, de vitesse $\overrightarrow{v}$: $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$, moment cinétique par rapport à O : $\overrightarrow{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p}$
- Moment dynamique d'une force par rapport à un point. $\overrightarrow{M}_{F,O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$.

Propriétés 1.1.2
- Changement de référentiel. $\overrightarrow{v}_a = \overrightarrow{v}_r + \overrightarrow{v}_e$ avec : $\overrightarrow{v}_a = \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}_{R_1}$, $\overrightarrow{v}_r = \frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}_{R_2}$ et $\overrightarrow{v}_e = \frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}_{R_1} + \overrightarrow{\omega}_{R_2/R_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$.
  $\overrightarrow{a}_a = \overrightarrow{a}_r + \overrightarrow{a}_e + \overrightarrow{a}_c$ avec $\overrightarrow{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}_{R_1} + \frac{\overrightarrow{\omega}_{R_2/R_1}}{dt}_{R_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \overrightarrow{\omega}_{R_2/R_1} \wedge (\overrightarrow{\omega}_{R_2/R_1} \wedge \overrightarrow{O_2M})$ et $\overrightarrow{a}_c = 2\overrightarrow{\omega}_{R_2/R_1} \wedge \overrightarrow{v}_r$
- Trièdre de Frénet. $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{N})$ avec $\overrightarrow{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$ et $\frac{\overrightarrow{N}}{\rho} = \frac{d\overrightarrow{T}}{ds}$ où ρ est le rayon de courbure. Dans cette base on a : $\overrightarrow{v} = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\overrightarrow{T} + \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{N}$

Théorème 1.1.3
- *RFD.* $\overrightarrow{F}_{ext\to M} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt}$
- *TMC.* $\overrightarrow{M}_{F,O} = -\overrightarrow{v_O} \wedge \overrightarrow{p} + \frac{d\overrightarrow{\sigma_O}}{dt}$

Déf. et prop. 1.1.4 (Référentiels)
- Référentiel Galiléen. Référentiel dans lequel la RFD est valable (plus exactement tel que le mouvement de tout point matériel isolé soit rectiligne et uniforme). Tous les référentiels galiléen sont en translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres.
- Référentiel non galiléen. Dans ce référentiel la RFD s'écrit : $\overrightarrow{F}_{ext\to M} + \overrightarrow{F}_{ie} + \overrightarrow{F}_{ic} = m\overrightarrow{a}_r$ avec $\overrightarrow{F}_{ie} = -m\overrightarrow{a}_e$ et $\overrightarrow{F}_{ic} = -m\overrightarrow{a}_c$

Déf. et prop. 1.1.5 (Forces centrales)
- Champ de forces centrales. Champ tel que $\overrightarrow{f} = f(r)\overrightarrow{u}_r$. Le mouvement est plan ($\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{cte}$ et $\sigma_0 = mr^2\frac{d\theta}{dt} = C$). Loi des Aires : vecteur surface $\overrightarrow{dS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{dr} = \frac{1}{2}r^2 d\theta \overrightarrow{u}_z$ d'où : $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = cte$. Le mouvement est conservatif ($\overrightarrow{f}$ dérive d'une énergie potentielle) et on a (conservation de l'énergie) : $\frac{1}{2}m((\frac{dr}{dt})^2 + r^2(\frac{d\theta}{dt})^2) + E_p(r) = E = cte$ soit avec la loi des aires : $\frac{1}{2}m(\frac{dr}{dt})^2 + \frac{\sigma_0^2}{2mr^2} + E_p(r) = E$. Ce qui est formellement équivalent à un mouvement 1d d'équation $E = \frac{1}{2}m\frac{dr}{dt}^2 + E_{p_{\text{eff}}}(r)$.
- formules de Binet. on pose $u = \frac{1}{r}$ et on a $v^2 = C^2(u^2 + \frac{du}{d\theta}^2)$ et $\overrightarrow{a} = -C^2u^2(u + \frac{d^2u}{d\theta^2})\overrightarrow{u}_r$.

Exemple 1 (Planètes)
- On a $m\overrightarrow{a} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{u}_r = -\frac{k}{r^2}\overrightarrow{u}_r$, ce qui donne $r = \frac{mC^2}{k(1+e\cos(\theta+\phi))}$. Mouvement elliptique ($e < 1$) : on se ramène à $r = \frac{p}{1+e\cos(\theta)}$, demi grand axe $a = \frac{p}{1-e^2}$, $E = -\frac{k}{2a}$. Mouvement hyperbolique ($e > 1$) : $r = \pm\frac{p}{1+e\cos(\theta)}$, $p = \frac{b^2}{a}$, $e = \frac{c}{a}$.
- Vecteur excentricité. $\overrightarrow{A} = \frac{\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{\sigma}}{k} - \overrightarrow{u}_r$. C'est un vecteur constant.

Déf. et prop. 1.1.6 (Oscillateurs)
- Oscillateurs 1d. Mouvements décrits par l'équation : $\frac{1}{2}m(\frac{ds}{dt})^2 + E_p(s) = cte = E$ où s est un paramètre du mouvement. La résultante des forces dérive alors d'une énergie potentielle : $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{\nabla}E_p$ et donc $\delta W_f = -dE_p$. Remarquons que cette équation peut s'intégrer : $dt = \pm\frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-E_p(s))}}$
- Equilibre. Les positions d'équilibre sont telles que : $\frac{dE_p}{ds} = 0$; si $\frac{d^2E_p}{ds^2} > 0$ l'équilibre est stable, si $\frac{d^2E_p}{ds^2} < 0$ l'équilibre est instable.
- Petites oscillations. Au voisinage d'une position d'équilibre stable, s_0 on a : $E_p(s) \approx E_p(s_0) + (s-s_0)\frac{dE_p}{ds}_{s_0} + \frac{1}{2}(s-s_0)^2\frac{d^2E_p}{ds^2}_{s_0} = E_p(s_0) + \frac{1}{2}(s-s_0)^2k^2$ car $\frac{d^2E_p}{ds^2} > 0$. Comme $\frac{1}{2}m\frac{ds}{dt}^2 + E_p = E = cte$, on a donc en posant $x = s - s_0$, $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$: c'est l'équation d'un oscillateur harmonique à une dimension de pulsation $\omega = \frac{k}{m}$.
- Oscillateurs 2d. Points soumis a des forces du type $\overrightarrow{f} = -kr\overrightarrow{u}_r$. Le mouvement est à force centrale donc plan et projeté sur une base, il donne pour chaque coordonnée une équation d'oscillateur 1d.
- Oscillateur complets. C'est une association en série de N oscillateurs. Pour N masses m reliées par des ressorts de rigidité k on a : $\forall n \in [1, N]$, $\frac{d^2x_n}{dt^2} = \omega(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1})$ avec $x_0 = 0 = x_{n+1}$. Il y a N modes propres c'est à dire N solutions distinctes de cette équation sous la forme $x = a_p\cos(\omega_p x + \phi_p)$. Le mouvement d'un point est donné par une combinaison linéaire de ces solutions.
- Oscillateur amorti. Equation : $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$. Trois régimes distincts : si $\alpha > \omega_0$, régime amorti ; si $\alpha = \omega_0$ régime critique ; si $\alpha < \omega_0$ régime oscillatoire amorti. Idem en 2d : résoudre le système couplé d'équation en posant $\xi = x + iy$. Si le régime est faiblement amorti, $E = E(0)\exp(-2\alpha t)$, $T \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$ et $Q = \frac{\pi}{\alpha T}$.

Remarque 1.1.7
- Poids. $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = m(\overrightarrow{G} - \overrightarrow{a}_e)$
- Portrait de phase. Pour un oscillateur c'est le graphe $(x, \frac{dx}{dt})$, pour un jeu de conditions initiales.
- Pendule sphèrique. (Foucault) il y a conservation du moment projeté sur l'axe vertical (et de l'énergie).

1.2 Systèmes matériels

Définitions 1.2.1 – Quantité de mouvement. Soient N particules M_i de masse m_i et de quantité de mouvement $\overrightarrow{p_i} = m_i\overrightarrow{v_i}$ on pose $M = \sum_{i=1}^N m_i$ et on a $\overrightarrow{p} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{p_i} = M\overrightarrow{v_G}$

– Réferentiel Barycentrique. C'est le référentiel (R^*) de centre G en translation par rapport à (R) galileen. La vitesse $\overrightarrow{v_i}^*$ de M_i dans ce référentiel est telle que : $\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{v_i}^* + \overrightarrow{v_G}$

– Moment. $\overrightarrow{\sigma}_A = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge \overrightarrow{p}_i = \overrightarrow{\sigma}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{p}$.

Théorème 1.2.2 (Résultante dynamique)

– *RFD.* $\overrightarrow{F}_{iext} = M\frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt}$ *avec* $\overrightarrow{F}_{iext} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{f}_{i\,ext/M_i}$

– *Koenig.* $\overrightarrow{\sigma}_O = \overrightarrow{\sigma}_p + \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{p}$ *avec* $\forall A,\ \overrightarrow{\sigma}_p = \overrightarrow{\sigma^*}_G = \overrightarrow{\sigma^*}_A$.
$E_c = \frac{1}{2}Mv_G^2 + E_c^*$

– *TMC.* $\frac{\overrightarrow{\sigma}_A}{dt} = \overrightarrow{v}_A \wedge \overrightarrow{p} + \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge \overrightarrow{f}_{iext}$. *Supposons que* $\forall i \in [1,N],\ \overrightarrow{f}_{i_{ext}} = m_i\overrightarrow{A}$ *alors* $\frac{\overrightarrow{\sigma}_A}{dt} = \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{F}_{ext}$ *où* $\overrightarrow{F}_{ext} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{f}_{i_ext}$.

Déf. et prop. 1.2.3 (Énergie potentielle)

– Deux particules. L'énergie potentielle d'interaction $E_p(x_1,...,z_2)$ existe ssi $\overrightarrow{f}_{2/1} = -\overrightarrow{\nabla_1}E_p(x_1,...,z_2)$ et $\overrightarrow{f}_{1/2} = -\overrightarrow{\nabla_2}E_p(x_1,...,z2)$, où $\overrightarrow{\nabla_i} = (\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i})$. On a alors $\delta W_{int} = -dE_{p_{int}}$ et $E_c + E_{p_{int}} = cte = E$, ce qui correspond à la bonne définition d'une énergie potentielle. On aura de plus en général : $\overrightarrow{f}_{1/2} = -\frac{dE_{p_{int}}(r)}{dr}\overrightarrow{u}_r$.

– N points. $E_{p_{int}} = \sum_{i>j} E_{p_{int}}(i,j)$.

Déf. et prop. 1.2.4 (Système à deux corps)

– Masse réduite. On considère deux particules en interaction et on étudie le mouvement de M_2 dans (R_1) référentiel (non galiléen) lié à M_1. On a alors : $\overrightarrow{f}_{1/2} = \mu\overrightarrow{a}_{M_2/R_1}$ où $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ est la masse réduite du système. Les forces d'inertie "disparaissent".

– Particule réduite. On peut choisir d'étudier ce mouvement dans (R^*). Soit $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$ alors $\overrightarrow{f}_{1/2} = \mu\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}$ (équation du mouvement de la particule réduite du système, M, de masse μ par rapport à G).

– On a de plus : $E_c = \frac{1}{2}\mu v^2$ et $\overrightarrow{\sigma}_p = \overrightarrow{GM} \wedge \mu\overrightarrow{v}$.

Exemple 2 (Masse variable) Problème unidimensionnel : fusée. On suppose une loi d'évolution de la masse $m(t) = m_0 - Dt$ (D : débit massique). Soit u la vitesse d'éjection des gaz. On considère le système fermé fusée+gaz éjectés. A l'instant t on a : $p(t) = m(t)v(t)$, à $t+dt$: $p(t+dt) = m(t+dt)v(t+dt) - dm(v-u)$. Le système étant fermé on a : $dp = f_{ext}dt$. Or $dp = m(t+dt)v(t+dt) - dm(v-u) - m(t)v(t) = d(mv) - dm(v-u) = mdv + udm = mdv - uDdt$. On a donc $m\frac{dv}{dt} = uD + f_{ext}$.

Remarque 1.2.5 On raisonnera souvent sur des répartitions continues (et non discrètes) de particules et donc de masse, de charges... Il est d'usage d'associer à ces grandeurs une grandeur volumique (par exemple : $\rho = \frac{dm}{d\tau}$) définie localement. On généralise alors les résultats en faisant : $m \leftrightarrow dm$, $q \leftrightarrow dq$, $\overrightarrow{f} \leftrightarrow \overrightarrow{df}$...

1.3 Solide indéformable

Définitions 1.3.1 – Solide indéformable. Solide S caractérisé par $\forall(M_i,M_j) \in S,\ \left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\| = cte_{i,j}$

– Moment d'inertie autour d'un axe fixe Δ : $J_\Delta = \iiint r^2 dm$

Proposition 1.3.2 $\forall(M,N) \in S,\ \overrightarrow{v}_M = \overrightarrow{v}_N + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{NM}$

Théorème 1.3.3 (Huygens)
Soit Δ et Δ_G deux axes parallèles séparés par une distance a. On a $J_\Delta = J_{\Delta_G} + Ma^2$

Déf. et prop. 1.3.4 – Glissement. Soient S_1 et S_2 deux solides, (R_1) le référentiel lié à S_1, (R_2) celui lié à S_2 et $I_1 \in S_1$, $I_2 \in S_2$ en contact en I à l'intant t donné. La vitesse de glissement de S_2 sur S_1 est alors : $\overrightarrow{v}_g = \overrightarrow{v}_{I_2/R_1}$ et on a : $\forall M \in S_2,\ \overrightarrow{v}_{M_2/R_1} = \overrightarrow{v}_g + \overrightarrow{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \overrightarrow{IM}$. Il y a glissement ssi $\overrightarrow{v}_g \neq \overrightarrow{0}$.

– Soit $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\Omega}_{R_2/R_1}$. Soit Π le plan tangent au contact. On a par rapport à Π, $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\Omega}_N + \overrightarrow{\Omega}_T$. Par définition, il y a roulement ssi $\overrightarrow{\Omega}_T \neq \overrightarrow{0}$ et pivotement ssi $\overrightarrow{\Omega}_N \neq \overrightarrow{0}$.

Déf. et prop. 1.3.5 (Systèmes de forces)

– Actions de contact : résultante $\overrightarrow{S}$ et moment $\overrightarrow{M}_I = \overrightarrow{M}_A + \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{S} \neq \overrightarrow{0}$ (a priori).

– Puissance d'un système de forces. On a $P_{S,R_1} = \sum \overrightarrow{v}_{i/R_1} \cdot \overrightarrow{f}_i = \sum \overrightarrow{f}_i(\overrightarrow{v}_{i/R_2} + \overrightarrow{v}_{O_2/R_1} + \overrightarrow{\Omega}_{S/R_1} \wedge \overrightarrow{O_2M_i}) = P_{S,R_2} + \overrightarrow{R}\overrightarrow{v}_{O_2/R_1} + \overrightarrow{\Omega}_{S/R_1}\overrightarrow{M}_{O_2}$ où $\overrightarrow{R} = \sum \overrightarrow{f}_i$ et $\overrightarrow{M}_{O_2} = \sum \overrightarrow{f}_i \wedge \overrightarrow{M_iO_2}$. Dans ($R_2$) lié au solide, $P_{S,R_2} = 0$ et donc $P_{S,R_1} = \overrightarrow{R}\overrightarrow{v}_{O_2/R_1} + \overrightarrow{\Omega}_{S/R_1}\overrightarrow{M}_{O_2}$, expression indépendante de O_2.

– Puissance des actions de contact : $P = \overrightarrow{S}\overrightarrow{v}_{I_2/R_1} + \overrightarrow{\Omega}_{R_2/R_1}\overrightarrow{M}_I$.

Lois 1.3.6 (Coulomb) – Frottement de glissement. Si $\overrightarrow{v}_g \neq \overrightarrow{0}$, on a : $\overrightarrow{R}_T\overrightarrow{v}_g < 0$ et $\left\|\overrightarrow{R}_T\right\| = f\left\|\overrightarrow{R}_N\right\|$. f est le coefficient de frottement dynamique. Si $\overrightarrow{v}_g = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{R}$ est dans le cône de frottement : $\left\|\overrightarrow{R}_T\right\| \leq f_0\left\|\overrightarrow{R}_N\right\|$. f_0 est le coefficient de frottement statique ($f \leq f_0$).

– Frottement de roulement. Si $\overrightarrow{\Omega}_T \neq \overrightarrow{0}$ on a un moment $\overrightarrow{M}$ tel que $\overrightarrow{M}\overrightarrow{\Omega}_T < 0$ et $\left\|\overrightarrow{M}\right\| = f\left\|\overrightarrow{\Omega}_T\right\|$.

Déf. et prop. 1.3.7 (Inertie) Pour un solide en rotation de vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe Δ de direction $\overrightarrow{u}$ passant par A on a : $\sigma_\Delta = \overrightarrow{\sigma}_A\overrightarrow{u} = J_\Delta\omega$ et $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$.

Remarque 1.3.8 – En général on a $\overrightarrow{\sigma} = [J]\overrightarrow{\omega}$ où $[J]$ est une matrice symétrique réelle (donc diagonalisable selon trois axes orthogonaux) appelée opérateur d'inertie et $E_c = \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega}([J]\overrightarrow{\omega})$.

2 Thermodynamique

2.1 Pression dans les fluides au repos

Déf. et prop. 2.1.1 (Pression)
La force de pression s'éxerçant sur un élément de surface $\overrightarrow{dS}$ est $\overrightarrow{dFs} = -p\overrightarrow{dS}$. La pression p dépend du point M.

Théorème 2.1.2 (Loi de l'hydrostatique)
Dans un fluide incompressible, $p(z) - p(z_0) = -\rho g(z - z_0)$. De manière plus générale, $\overrightarrow{\nabla}p - f_v = 0$ (f_v désigne la résultante des forces volumiques s'exerçant sur le système ; ici $f_v = -\rho g$).

Remarque 2.1.3 ρ la masse volumique est constante pour un fluide incompressible.

THÉORÈME 2.1.4 (POUSSÉE D'ARCHIMÈDE)
Tout corps plongé dans un système de fluides est soumis à une force, la poussée d'Archimède, dirigée vers le haut, de norme le poids du volume de fluide déplacé.

2.2 Premier principe

Définitions 2.2.1 (Transformations)
- Une transformation est dite quasi-statique si elle est une succession continue d'états d'équilibre thermodynamique et mécanique internes au sytème et infiniment proches les uns des autres.
- Une transformation réversible est une transformation quasi-statique sans frottement.
- Une transformation est dite adiabatique si elle s'effectue sans transfert thermique.
- Une transformation est dite isotherme si elle s'effectue à température constante.
- Une transformation est dite isochore si elle s'effectue à volume constant.
- Une transformation est dite isobare si elle s'effectue à pression constante.
- Une transformation cyclique est telle que le système se retrouve dans le même état à l'état final qu'à l'état initial.

Propriétés 2.2.2
- Pour une transformation quelconque entre deux états d'équilibre 1 et 2, $W = -\int_1^2 P_{ext} dV$.
- Pour une transformation réversible entre deux états d'équilibre 1 et 2, $W = -\int_1^2 P dV$.
- Soit une transformation entre deux états d'équilibre 1 et 2 telle que $\Delta Ec = \Delta Ep = 0$, le système étant fermé, $\Delta U = W + Q$.
- Pour une transformation infinitésimale, $dU = \delta W + \delta Q$.

THÉORÈME 2.2.3 (PREMIER PRINCIPE)
U est une fonction d'état extensive.

Définition 2.2.4 (enthalphie) On définit l'enthalpie H par $H = U + PV$. H est extensive. C'est une fonction d'état.

Proposition 2.2.5
- Considèrons une transformation isochore entre deux états d'équilibre 1 et 2 sans travail autre que celui des forces de pression, et $\Delta(Ec+Ep) = 0$ alors $\Delta U = Q_v$.
- Considèrons une transformation (quelconque) isobare à $P = P_{ext} = cste$ alors $W = -P_{ext}\Delta V$ donc $\Delta H = Q_p$.
- Considèrons une transformation réversible isobare alors $dH = \delta Q$.

Définition 2.2.6 On pose $C_v = (\frac{\partial U}{\partial T})_V$ capacité calorifique à volume constant et $C_p = (\frac{\partial H}{\partial T})_P$ capacité calorifique à pression constante.

2.3 Maxwell-Boltzmann

THÉORÈME 2.3.1 (LOI DE MAXWELL-BOLTZMANN)
La probabilité élémentaire qu'une particule ait une vitesse V_x comprise entre V_x et $V_x + dV_x$, une vitesse V_y comprise entre V_y et $V_y + dV_y$, une vitesse V_z comprise entre V_z et $V_z + dV_z$ est $dP = \alpha \cdot exp(\frac{-\frac{1}{2}m(V_x^2+V_y^2+V_z^2)}{kT}) dV_x dV_y dV_z$ avec alpha tel que $\iiint dP = 1$ et k constante de Boltzmann.

Proposition 2.3.2 De cette loi nous pouvons déduire deux résultats importants :
- $< V_x >_{V_x>0} = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$
- $u = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$, u étant la vitesse quadratique moyenne.

2.4 Etude macroscopique des gaz parfaits

THÉORÈME 2.4.1 (ÉQUATION D'ÉTAT DES GAZ PARFAITS)
$PV = nRT$

Remarque 2.4.2 Cette équation se met sous d'autres formes :
- $MPV = mRT$
- $\rho = \frac{MP}{RT}$ pour $\rho = \frac{m}{V}$

Proposition 2.4.3 La loi de l'hydrostatique donne $\frac{dP}{dz} = -\rho \cdot g$, nous avons donc $P = P_0 \cdot exp(-\frac{Mgz}{RT_0})$ si $T = T_0 = cste$.

2.5 Etude énergétique macroscopique des gaz parfaits

THÉORÈME 2.5.1 (LOIS DE JOULE)
Pour un gaz parfait, U et H ne dépendent que de la température T.
On a $dU = C_v dT$ et $dH = C_p dT$.

Définition 2.5.2 (γ) On pose $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$. On a (loi de Mayer) $C_p - C_v = nR$, $C_v = \frac{nR}{\gamma-1}$, $C_p = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}$.

THÉORÈME 2.5.3 (LOIS DE LAPLACE)
Pour une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait, en supposant γ constant, on a : $TV^{\gamma-1} = cste$, $PV^\gamma = cste$ et $P^{1-\gamma}T^\gamma = cste$.

Déf. et prop. 2.5.4
- Un cycle de Carnot est constitué de deux transformations isothermes à T_1 et T_2 ($T_2 < T_1$) et de deux transformations adiabatiques, toutes ces transformations étant réversibles.
- On définit le rendement d'une machine par

$$\rho = \frac{\text{ce qui rapporte}}{\text{ce qui coûte}} = \frac{|W|}{Q_1}$$

- Pour le cycle de Carnot, $\rho = 1 - \frac{T_2}{T_1}$.

THÉORÈME 2.5.5 (SYSTÈMES OUVERTS)
On pose h_1 l'enthalpie massique à l'entrée de la machine, h_2 l'enthalpie massique à la sortie de la machine, c_1 la vitesse du fluide à l'entrée, c_2 la vitesse du fluide à la sortie, w' le travail massique autre que celui des forces de pression et q la quantité de chaleur massique. On a alors $\frac{1}{2}c_2^2 - \frac{1}{2}c_1^2 + h_2 - h_1 = w' + q$. Où, infinitésimalement : $d(\frac{1}{2}c^2 + h) = \delta w' + \delta q$.

2.6 Second principe

Définition 2.6.1 A tout système fermé on associe une grandeur non conservative S appelée entropie. S est extensive. Pour des états d'équilibre, S est une fonction d'état. $\Delta S = S_2 - S_1 = S^r + S^p$. S^p est l'entropie produite, toujours positive. S^r est l'entropie reçue, due aux transferts thermiques avec l'extérieur. On a $S^r = \int_1^2 \frac{\delta Q^{\text{réel}}}{T}$ où T est la température au niveau de la surface du système qui échange de la chaleur. On a $dS = \frac{\delta Q^{\text{rév}}}{T} = \frac{1}{T}(dU + PdV)$. On a donc $dU = TdS - PdV$ et $dH = TdS + VdP$.

Théorème 2.6.2 (3^{eme} principe)
L'entropie de tout système tend vers 0 lorsque T tend vers 0.

2.7 Exemples de bilans d'entropie. Application aux machines thermiques

Proposition 2.7.1 Pour une source de chaleur, $dS_{\text{source}} = \frac{\delta Q_{\text{source}}}{T_{\text{source}}}$.

Théorème 2.7.2 (Inégalité de Carnot-Clausius)
Soit un système fermé, cyclique, qui échange de la chaleur avec n sources (températures T_i). On a $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \Delta S_i = \oint \frac{\delta Q_i^{\text{source}}}{T_i} = -\oint \frac{\delta Q_i}{T_i}$ et $\Delta S_{\text{univers}} \geq 0$. La machine étant cyclique, $\Delta S = 0$. Nous avons donc

$$\sum_{i=1}^{n} \oint \frac{\delta Q_i}{T_i} \leq 0$$

avec égalité si réversible.

2.8 Changement d'état des corps purs

Définition 2.8.1 (chaleur latente) On appelle chaleur latente de vaporisation d'un corps pur L_v à la température T la variation d'enthalpie de l'unité de masse de ce corps qui passe de l'état liquide à l'état gazeux à la température T. On définit de même L_F chaleur latente de fusion et L_S chaleur latente de sublimation. Avec ces définitions, L_V, L_F, $L_S \geq 0$.

Proposition 2.8.2 Au point triple, on a : $L_S(T) = L_F(T) + L_V(T)$. Cette relation n'est pas vraie en général, il faut prendre en compte l'enthalpie massique nécessaire pour passer de la température de fusion à la température d'ébullition.

2.9 Conduction de la chaleur

Définition 2.9.1 Il y a trois modes de propagation de la chaleur :
- rayonnement
- convection (transport d'énergie par déplacement de matière).
- conduction (transfert thermique sans mouvement de matière).

Phénomènes de transport (mécanismes de diffusion).
- transport d'électricité : $\vec{j} = -\sigma \vec{\nabla} V$ (loi d'Ohm).
- transport de matière : $\vec{j} = -D\vec{\nabla} n$ (loi de Fick).
- transport de chaleur : $\vec{j} = -\lambda \vec{\nabla} T$ (loi de Fourier).

Remarque 2.9.2 Dans un gaz le coefficient λ peut être calculé : $\lambda = \frac{1}{3} l\overline{v}C_v$, où l est le libre parcours moyen (parcours d'une molécule entre deux chocs successifs). De même dans le cas de l'autodiffusion d'un gaz on a : $D = \frac{l\overline{v}}{3}$.
Dans le cas d'une interface entre un fluide et le milieux extérieur le gradient de température devient infini, on remplace alors la loi de Fourier par la loi de Newton $\delta Q = h(T_{\text{ext}} - T)dSdt$, où δQ est la chaleur reçue par le fluide en provenance de l'extérieur et h est le coefficient de transfert thermique de surface.

Propriété 2.9.3 (Equation de la chaleur)
- Cas 1D. $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$.
- Cas 3D. $\Delta T = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$.

3 Optique

3.1 Optique géométrique

Définitions 3.1.1
- Source lumineuse. une source de lumière peut être ponctuelle ou étendue, auquel cas elle est superposition de sources "ponctuelles" d'étendue dS.
- Rayon lumineux. C'est la forme d'émission de l'énergie par une source lumineuse.
- Intensité. Chaque élement dS centré en P donne en M un éclairement (ou une intensité) $dE = L(P, M)dS$, où L est fonction de la luminosité en P.
- Chemin optique. Le chemin optique $(OM) = L$ est tel que : $dL = nds$, où s est l'abscisse curviligne le long du rayon lumineux comptée positivement dans le sens de propagation de la lumière.
- Surface d'onde. Ce sont les surfaces telles que $(OM) = cte$.
- Dioptre. C'est la surface séparant deux milieux d'indices différents.

Lois 3.1.2 (Snell-Descartes)
- Réflexion. Les rayons sont dans un même plan (le plan d'incidence) et $i_1 = i_2$ $\Leftrightarrow \exists \beta,\ \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \beta \vec{N}$
- Réfraction. Les rayons sont dans un même plan (le plan d'incidence) et $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2) \Leftrightarrow \exists \alpha,\ n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2 = \alpha \vec{N}$

Principes 3.1.3
- Retour inverse. Le trajet lumineux spatial est indépendant du sens de propagation de la lumière.
- Fermat. Pour aller de A à B la lumière emprunte le trajet qui rend le chemin optique stationnaire (c'est à dire extrémal). On retrouve ainsi les lois de Descartes.

Théorème 3.1.4 (Malus)
Les rayons lumineux sont orthogonaux aux surfaces d'onde.

Définition 3.1.5
- Objets et images. A et A' sont images l'un de l'autre par un système optique si tout rayon issu de A (l'objet) passe par A' (l'image). On a $(AA') = cte$.
- Réel, virtuel. Si un objet (une image) est une intersection de rayon lumineux il est réel, si c'est l'intersection de prolongements de rayons lumineux il est virtuel.
- Stigmatisme. Un système est dit rigoureusement stigmatique pour le couple (A, A') ssi tout rayon issu de A passe par A'. C'est nécessaire pour pouvoir fabriquer des images "correctes".

Propriétés 3.1.6 On cherche les différents dioptres permettant un stigmatisme rigoureux pour un couple de points donné. Soit I un point du dioptre, (A, A') un couple de points.
- Réflexion. On a $AI \pm IA' = cte$. L'ensemble des points I est donc un ellipsoïde ou un hyperboloïde de foyers A et A'.
- Réfraction. On a encore $(AI) + (IA') = nAI + n'IA' = cte$. Si $cte = 0$, on suppose $\lambda = \frac{n'}{n} > 1$, le dioptre obtenu est une sphère de centre C de rayon R telle que : $R = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}\overline{AA'}$ et $\overline{AC} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}\overline{AA'}$. A et A' sont alors appelés points de Weierstrass de dioptre sphérique.

Principes 3.1.7 (Conditions de Gauss) Les cas de stigmatisme rigoureux étant extrêmement rares, on se contentera en pratique du stigmatisme approché assuré par les conditions de Gauss : les rayons sont paraxiaux, c'est à dire voisins de l'axe optique et frappant les dioptres et miroirs au voisinage de leur sommet. Cela permet d'obtenir les relations de conjugaison des instruments d'optique usuels.

Propriétés 3.1.8 (Relations de conjugaison)
- Conventions. on pose $z = \overline{SA},\ z' = \overline{SA'},\ R = \overline{SC}$, $\xi = \overline{CA},\ \xi' = \overline{CA'},\ \sigma = \overline{FA},\ \sigma' = \overline{F'A'}$
- Miroir sphérique. On a $\frac{1}{z'}+\frac{1}{z} = \frac{2}{R},\ \frac{1}{\xi'}+\frac{1}{\xi} = -\frac{2}{R},\ \sigma\sigma' = ff'$ et $\gamma = -\frac{z'}{z} = \frac{\xi'}{\xi} = -\frac{\sigma'}{f'} = -\frac{f}{\sigma}$.
- Dioptre sphérique. On a $\frac{n'}{z'} - \frac{n}{z} = \frac{n'-n}{R},\ \frac{n}{\xi'} - \frac{n'}{\xi} = \frac{n'-n}{R},\ \sigma\sigma' = ff'$ et $\gamma = \frac{nz'}{n'z} = \frac{\xi'}{\xi} = -\frac{\sigma'}{f'} = -\frac{f}{\sigma}$.
- Lentille mince d'indice n placée dans l'air. On pose ici $z = \overline{OA},\ z' = \overline{OA'}$ et on a $\frac{1}{z'}-\frac{1}{z} = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f},\ \sigma\sigma' = ff'$ et $\gamma = \frac{z'}{z} = -\frac{\sigma'}{f'} = -\frac{f}{\sigma}$, avec $\frac{1}{f'} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$.
- Relation de Lagrange-Helmoltz. Pour un dioptre sphérique on a $\gamma_\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{z}{z'} = \frac{n}{n'\gamma}$, soit $n\alpha\overline{AB} = n'\alpha'\overline{A'B'}$.

Propriétés 3.1.9 (Systèmes centrés)
- Foyers. Foyer image : $\infty \to F'$, foyer objet : $F \to \infty$
- Plan principaux. Plans conjugués de grandissement égal à 1. Ils sont perpendiculaires à l'axe, on pose H et H' les points d'intersection avec l'axe du système.
- Système à foyers. De tels systèmes possédent foyers et plans principaux. On pose $z = \overline{HA},\ z' = \overline{H'A'},\ f = \overline{HF},\ f' = \overline{H'F'}$ et on a alors : $\frac{n'}{z'} - \frac{n}{z} = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$.
- Système afocal. Tout rayon incident parallèle à l'axe ressort parallèle à l'axe. On a $\gamma = \gamma_\alpha = cte$.
- Système catadioptrique. Système centré possédant un miroir sphèrique (qui termine nécessairement le système). Tout système catadioptrique est équivalent à un miroir sphérique dont le centre Γ (resp. le sommet Σ) est l'image du centre C (resp. du sommet S) du miroir réel par la lumière travaillant dans le sens réfléchi.

3.2 Ondes lumineuses

Définition 3.2.1 – Equation d'onde. Une grandeur S est dite ondulatoire si elle est représentée par une fonction $s(x, y, z, t)$ solution de l'équation d'onde $\Delta s - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$.
- Surface d'onde. Ce sont les surfaces où $s = cte$ à t donné.

Proposition 3.2.2 – Cas 1D. Les solutions de l'équation d'onde sont $s = f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c})$. Ce sont des ondes planes (les surfaces d'onde sont des plans), le terme en $f(t-\frac{x}{c})$ correspond à une onde progressive se déplaçant vers la droite à la célérité c, le terme en $g(t+\frac{x}{c})$ correspond à une onde progressive se déplaçant vers la gauche (parfois appelée onde régressive) à la célérité c.
- Cas 3D sphérique. On pose $r = OM$ et on suppose $s(r, t)$. Alors on a $s = \frac{f(t-\frac{r}{c})}{r} + \frac{g(t+\frac{r}{c})}{r}$. Les surfaces d'onde sont des sphères, on parle d'onde sphérique.

Définition 3.2.3 Par définition, une OPPS se propageant vers la droite s'écrit $s = f(t - \frac{x}{c}) = a\cos(\omega(t - \frac{x}{c})) = a\cos(\omega t - kx)$, avec $k = \frac{\omega}{c}$. Ce qui donne en complexes : $\underline{s} = ae^{(i(\omega t-kx))}$

Remarque 3.2.4 – si on pose $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{u}$ le vecteur unitaire associé à la direction de propagation on a la forme générale : $s = a\cos(\omega t - \overrightarrow{k}\overrightarrow{r})$.
- une expression du type $s = A(y, z)\cos(\omega t - kx)$ sera considérée comme une onde plane, les surfaces équiphases étant des plans.

Déf. et prop. 3.2.5 – En optique la grandeur vibratoire est un champ électromagnétique qui dans le cas de l'onde plane a pour structure : $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{k})$ est un trièdre direct, $B = \frac{E}{c}$ et pour une propagation dans la direction O_z les composantes E_x et E_y obéissent à une équation d'onde.
- Polarisation. Ce qui donne à une dimension : $E_x = E_1\cos(\omega t-kz+\alpha_1),\ E_y = E_2\cos(\omega t-kz+\alpha_2),\ E_z = 0$. La surface décrite par $\overrightarrow{E}$ dans le plan (E_x, E_y) est donc une ellipse. On dit donc que la polarisation est elliptique. Si $E_1 = E_2$ et si $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ l'ellipse devient un cercle et la polarisation est dite circulaire. Si $\alpha_1 = \alpha_2$, la polarisation est dite rectiligne.
- Gauche, droite. Si $\overrightarrow{E}$ tourne dans le plan orienté (E_x, E_y) dans le sens trigonométrique alors la polarisation est dite gauche. Dan le cas contraire elle est dite droite.

Remarque 3.2.6 – On montre que si $0 < \alpha_1 - \alpha_2 < \pi$ alors la polarisation est gauche et si $-\pi < \alpha_1 - \alpha_2 < 0$ alors elle est droite.
- Une polarisation rectiligne est somme de deux polarisations circulaires, l'une droite l'autre gauche. (on écrit : $\overrightarrow{E} = E_1\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u}_x = E_1\cos(\omega t - kz)(\frac{\overrightarrow{u}_x+\overrightarrow{u}_y}{2} + \frac{\overrightarrow{u}_x-\overrightarrow{u}_y}{2})$).

Exemple 3 Certains matériaux font tourner le plan de polarisation $(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{E})$ d'une OPPS les traversant d'un angle α. Si du point de vue de l'observateur recevant l'OPPS le plan a tourné vers la droite la substance est dite dextrogyre, dans le cas contraire elle est lévogyre. On montre que ceci équivaut à dire que les vitesses des ondes polarisées circulairement gauche (c_g) et droite (c_d) sont différentes dans le milieu. Si le matériaux est d'épaisseur e on a l'angle de rotation : $\theta = \frac{1}{2}\omega e(\frac{1}{c_d} - \frac{1}{c_g}) = \frac{1}{2}k_0\delta$, avec la différence de marche $\delta = (n_d - n_g)e = ec_0(\frac{1}{c_d} - \frac{1}{c_g})$. Pour λ donné la quantité $[\theta] = \frac{d\theta}{dz}$ appelée pouvoir rotatoire est indépendante de l'épaisseur du matériaux. Dans le cas d'une solution de concentration c on définit le pouvoir rotatoire spécifique par : $\theta_c = \frac{[\theta]}{c}$.

Définition 3.2.7 – Intensité. Par définition, $I = k\overline{s^2}$, k coefficient de proportionnalité. Elle est ainsi proportionnelle à l'énergie transportée par l'onde.
- Polariseur. Un polariseur est un dispositif qui ne laisse passer que la composante du champ paralléle à une direction déterminée, l'onde en sortie est polarisée rectilignement dans la direction du polariseur.
- Lame cristalline. Milieu anisotrope où l'indice dépend de la direction de l'onde. On se restreint içi aux matériaux uniaxes, c'est à dire tels que : si l'onde est polarisée selon une direcion quelconque du plan (x, y) la polarisation en sortie est elliptique, si l'onde est polarisée selon x ou y, la polarisation n'est pas changée en sortie. Les directions x et y sont les lignes neutres de la lame et elles sont d'indices a priori différents. L'axe d'indice le plus grand est l'axe lent, l'autre l'axe rapide.
- Lumière naturelle. La lumière naturelle est émise sous forme de trains d'ondes de durée très brève à l'échelle macroscopique (typiquement 10^{-10} à 10^{-12} secondes), l'état de polarisation de chacun des trains d'ondes étant indépendant (toutes les directions de polarisation sont prises aléatoirement).

Remarque 3.2.8 (Lames cristallines) On montre de la même manière que pour les substances dextrogyre et lévogyre qu'une lame cristalline introduit un déphasage en sortie ϕ entre les deux projections de la gandeur vibratoire (ici $\overrightarrow{E}$), et on a : $\phi = \frac{\omega}{c_0}(n_y - n_x)e = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta$, où δ est la différence de marche. On distingue tois types de lames : lame onde ($\delta = p\lambda_0,\ p \in \mathbb{N}$, pas d'intéret), lame demi-onde ($\delta = \frac{p\lambda_0}{2},\ p \in \mathbb{N}$) et lame quart d'onde ($\delta = \frac{p\lambda_0}{4},\ p \in \mathbb{N}$).

Lois 3.2.9 (Malus) Si le plan de polarisation d'une onde incidente fait un angle α avec la direction d'un polariseur l'intensité en sortie vaut : $I = I_0 \cos^2 \alpha$.

Remarque 3.2.10
- L'intensité doit être conçue comme la valeur de s^2 moyennée sur le temps de réponse τ du detecteur : $I = \frac{a}{\tau}\int_0^\tau s^2 dt$. Soit T la période de l'onde. Si $T \ll \tau,\ I \simeq \overline{s^2}$ et si $\tau \ll T,\ I \simeq s(t)^2$.
- Dans le cas de la lumière naturelle, l'intensité étant une moyenne et les angles α se succédant aléatoirement on a : $I = I_0\overline{\cos(\alpha)^2} = \frac{I_0}{2}$.

Déf. et prop. 3.2.11 (Ondes Stationnaires)
- Cas sinusoïdal. On considére une OPPS incidente : $s_i(x,t) = a\cos(\omega t - kx)$ avec un milieu tel que : $\forall t,\ s(0,t) = 0$. Il existe alors nécessairement une onde réfléchie s_r, telle que pour l'onde totale $s = s_i + s_r$ la condition aux limites soit remplie. On écrit $s_r(x,t) = b\cos(\omega' t + k'x + \phi)$. La condition aux limites donne : $\omega = \omega',\ \phi = 0,\ a = -b$. On a donc $s = 2a\sin(kx)\sin(\omega t)$. L'onde ne ce propage plus : elle est stationnaire. Si de plus on impose $s(-L,t) = 0$, cela implique $kL = n\pi,\ n \in \mathbb{N}$ et les seuls couples admissibles sont : $(k_n, \omega_n) = (n\frac{\pi}{L}, n\frac{\pi c}{L})$. Ce sont les modes propres de la cavité.
- Cas général. Si on écrit $s = f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c})$ et si on impose $s(0,t) = s(L,t) = 0$ on montre que l'on a $f = -g$, f ($\frac{2L}{c}$)-périodique et donc en utilisant la série de fourier de f on a : $s(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \sin(k_n x)\sin(\omega_n t + \phi_n)$. s est la superposition des modes propres précédents.

Déf. et prop. 3.2.12
- Ondes planes progressives non sinusoïdales. Cas 1D. $s(x,t) = f(x - ct) = f(u)$ ce qui s'écrit encore $s(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{i(kx-\omega t)}dk$ avec $A(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(u)e^{-iku}du$. L'onde est ainsi décomposée en OPPS.
- Milieu dispersif. C'est un mileu dans lequel $\frac{\omega}{k} = f(k) \neq cte$.
- Vitesse de phase : $v_\phi = \frac{\omega}{k}$, vitesse de groupe : $v_G = \frac{d\omega}{dk}$. On a toujours $v_G \leq c_0$ alors que v_ϕ peut dépasser c_0.

Exemple 4 (Paquet d'onde) On suppose que la lumière est émise sous forme de trains d'onde : $\forall u \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}],\ s(u) = a\cos(k_0 u)$. Après calcul on obtient : $A(k) = \frac{aL}{2}(\mathrm{sinc}((k - k_0)\frac{L}{2}) + \mathrm{sinc}((k + k_0)\frac{L}{2}))$. La largeur du pic principal d'un sinc est $\Delta k = \frac{4\pi}{L}$. C'est la largeur naturelle de raie (cas "idéal" : $L \to \infty$ onde monochromatique). L est alors la longueur de cohérence de la lumière, $\tau = \frac{L}{c}$ est le temps de cohérence.

Remarque 3.2.13 (Effet Doppler)
Une source mobile dans le référentiel (R) émet dans la direction O_x une onde de fréquence ν_0 alors la fréquence reçue par un observateur de (R) est $\nu \simeq \nu_0(1 + \frac{v_x}{c})$.

3.3 Interférences

Principes 3.3.1 On admet qu'il est possible de procéder à une addition scalaire des ondes émises par deux sources à grande distance de celles ci.

Propriété 3.3.2 Si on a : en S_1, $s_1(t,0) = a\cos(\omega t + \alpha_1)$ et en S_2, $s_2(t,0) = a\cos(\omega t + \alpha_2)$, on leur associe les grandeurs complexes (pour $n = 1,2$) : $\underline{s}_n = \underline{A}_n e^{-i\omega t}$ avec $\underline{A}_n = ae^{-i\alpha_n}$. On pose $r_n = S_n M$. L'amplitude résultante en M est donc : $\underline{S} = \underline{A}_1 e^{ikr_1} + \underline{A}_2 e^{ikr_2}$ et l'intensité après calcul (en posant $\phi = k(r_2 - r_1)$ et $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$) : $I = I_0(1 + cos(\phi - \Delta\alpha))$. Les surfaces d'intensité égale sont des hyperboloïdes de foyer S_1 et S_2, leur trace par un plan perpendiculaire à S_1 et S_2 donne des franges d'interférence en forme d'anneaux et si le plan est parallèle à S_1 et S_2 ce sont des segments de droite si $r_1 \simeq r_2$.

Définitions 3.3.3
- Différence de marche. C'est : $\delta = (S_2 M) - (S_1 M)$.
- Franges brillantes. Ce sont les franges d'intensité maximale, i.e. telles que $k(r_2 - r_1) - \Delta\alpha = 2n\pi$. Ce qui donne encore : $\delta = n\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{2\pi}\Delta\alpha$ et si $\Delta\alpha = 0$ on a $\delta = n\lambda_0$. Ce sont des interférences constructives.
- Franges sombres. On a de même $\delta = (2n+1)\frac{\lambda_0}{2} + \frac{\lambda_0}{2\pi}\Delta\alpha$ et si $\Delta\alpha = 0$ on a $\delta = (2n+1)\frac{\lambda_0}{2}$
- L'ordre d'interférence est le p tel que $\delta = p\lambda_0$.
- Visibilité. $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$.
- Interfrange. C'est la distance séparant deux régions d'égale intensité.

Remarque 3.3.4
- Fréquences différentes. On additionne simplement les intensités. Il n'y a plus d'interférences. (Sauf si les fréquences sont proches : on observe des battements).
- Amplitudes différentes. On obtient : $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\phi - \Delta\alpha)$.

Remarque 3.3.5 (Difficultés de l'optique)
- Cohérence temporelle. On ne peut réaliser d'interférences à l'aide de deux sources ponctuelles distinctes : en effet si les fréquences sont différentes le phénomène d'interférence disparait et de toute manière la phase (le terme en $\Delta\alpha$) varie aléatoirement d'un train d'onde à l'autre : l'intensité qui est une valeur moyenne sera alors constante : il n'y a plus d'interférences. On utilisera donc des sources secondaires (obtenue à partir d'une même source) cohérentes entre elles.
- Caractère vectoriel. L'addition scalaire suppose que les grandeurs vibratoires vectorielles soient colinéaires. Cela n'est possible en toute rigueur qu'à l'infini. On utilisera donc des lentilles qui permettent de ramener des rayons allant à l'infini dans leur plan focal image donc à distance finie.
- Cohérence spatiale. Les sources ne sont pas rigoureusement ponctuelles. on les considère alors comme une superposition de sources élémentaires de surface dS émettant : $dI = \frac{I(x,y)}{S}dS$.

Exemple 5 (Fentes d'Young) On se place dans les conditions "classiques" : une source S dans le plan (O_1, x, y), une lentille de focale f_1', les fentes d'Young dans le plan (O, x, y) distantes d'une longueur a, une deuxième lentille de focale f' et l'écran (E) dans le plan (F', x, y). On suppose dans un premier temps la source S ponctuelle. on observe l'intensité en $M(x,0) \in (E)$ la source ayant pour coordonnées

S(y,0). On montre : $I(M) = 2I_o(1+\cos(2\pi(\frac{ax}{\lambda f'} + \frac{ay}{\lambda f_1'}))$. L'interfrange vaut $i = \frac{\lambda f'}{a}$, la frange centrale est en : $x_0 = -y\frac{f'}{f_1'}$. Supposons que la source S soit de largeur 2b, centrée en O : on écrit alors : $dI = I_0(y)dy$ et on a : $I(M) = \int_{-b}^{b} I_0(y)(1+\cos(2\pi(\frac{ax}{\lambda f'} + \frac{ay}{\lambda f_1'}))dy$. Et si $I_0(y) = cte = \frac{I_0}{b}$ on a : $I(M) = I_0(1+\mathrm{sinc}(\frac{\pi ab}{\lambda f_1'})\cos(\frac{2\pi ax}{\lambda f'}))$. Et la visibilité des franges est : $V = \mathrm{sinc}(\frac{\pi ab}{\lambda f_1'})$.

Exemple 3.3.6 (Division d'amplitude)

- Fabry-Pérot. C'est un ensemble de deux lames semi-réfléchissantes distantes de e. Soient r_1 et r_2 les coefficients de réflexion de l'onde sur les deux lames à l'intérieur du dispositif. On note $\underline{A}_1$ l'amplitude complexe de l'onde transmise sans refléxion.La différence de marche ente deux rayons (différant par deux reflexions successives) est $\delta = 2e\cos(i)$ où i est l'angle d'incidence. Soit avec $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$ le déphasage : $\underline{S} = \underline{A}_1(1 + r_1r_2e^{i\phi} + (r_1r_2)^2e^{2i\phi} + ...)$, ce qui donne $I = \frac{I_{\max}}{1+m\sin(\frac{\phi}{2})}$, avec $m = \frac{4r_1r_2}{(1-r_1r_2)^2}$ (fonction d'Airy). Les maximums sont en pratique très pointus. On pourra ne considérer que les deux premiers rayons dans le cas d'interfaces faiblement réfléchissantes.
- Michelson. Un Michelson est formellement équivalent à un Fabry-Pérot où l'on ne considère que les deux premiers rayons.

Remarque 3.3.7 Pour une lame séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2, on a : $r \simeq \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}$ et $t \simeq \frac{2n_1}{n_1+n_2}$ pour des incidences proches de la normale.

Propriété 3.3.8 (Lumière polychromatique)

- 2 raies. On additionne les intensités dues à chaque raie et en supposant $I_1 = I_2 = I_0$ et que $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ et $\Delta\lambda \ll \lambda$, on obtient : $I = 4I_0(1 + \cos(\pi\frac{ax}{f'}\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2})\cos(2\pi\frac{ax}{\lambda f'})$ et $V = \cos(\pi\frac{ax}{f'}\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2})$. Quand $V = 0$ il y a anticoïncidence et lorsque $V = V_{\max}$, il y a coïncidence.
- Lumière blanche. Le spectre émis est continu, l'oeil à l'impression de voir du blanc. Cependant les longueurs d'onde telles que $\delta = \frac{ax_0}{f'} = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$ présente des interférences destructives : le spectre est cannelé est le blanc est dit d'ordre supérieur.

3.4 Diffraction

Principes 3.4.1 (Huygens-Fresnel)

- Huygens (1678). Les vibrations qui se propagent à l'extérieur d'une surface fermée Σ, à l'intérieur de laquelle se trouve la source S, sont identiques à celles que l'on obtiendrait uen supprimant cette source et en la remplaçant par des sources convenablement réparties sur Σ.
- Fresnel (1818). Chaque élément de surface $d\Sigma$ entourant un point A de la surface Σ est une source secondaire dont l'amplitude complexe est proportionnelle à $d\Sigma$ et à l'amplitude complexe en A de l'onde issue de S. Toutes les ondelettes issues des divers points A interfèrent en M pour donner la vibration résultante.
- Conséquence. $d\underline{S}(M) = K(\overrightarrow{u})\underline{A}_0t(A)\frac{e^{ik_0(AM)}}{AM}dS$.

Remarque 3.4.2 En général on considére que $\frac{K(\overrightarrow{u})}{AM} \simeq cst$.

Proposition 3.4.3 (Fraunhoffer)

- On considére la diffraction à l'infini dans la direction $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$, par une pupille P de facteur de transmission $t(A)$, $A \in P$. On peut écrire alors : $I = K\left|\int\int_P \underline{A}_0(A)t(A)e^{-ik(\alpha x+\beta y)}dxdy\right|$
- La diffraction de Fraunhoffer est la diffraction autour de l'image géométrique.

Exemple 6

- Pupille rectangulaire. On considère $P = [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \times [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$. On a alors avec les notations déjà introduites, $I = I_o\,\mathrm{sinc}^2(\frac{\pi}{\lambda}\alpha a)\,\mathrm{sinc}^2(\frac{\pi}{\lambda}\beta b)$. Soit dans le plan focal d'une lentille : $I = I_o\,\mathrm{sinc}^2(\frac{\pi}{\lambda}a\frac{X}{f'})\,\mathrm{sinc}^2(\frac{\pi}{\lambda}b\frac{Y}{f'})$. Si $b \to \infty$, Il n'y a pas de diffraction selon O_y et on a $I = I_o\,\mathrm{sinc}^2(\frac{\pi}{\lambda}a\frac{X}{f'})$.
- Pupille circulaire de diamètre a. On a alors : $I = 4I_0(\frac{J_1(\frac{\pi}{\lambda}\alpha a)}{\frac{\pi}{\lambda}\alpha a})^2$, où J_1 est la fonction Besse J d'ordre 1 (premier zéro en $\alpha = 1.22\frac{\lambda}{a}$).

Propriétés 3.4.4

- Une augmentation de la taille de la pupille contracte la figure de diffraction et inversement.
- Si la pupille a un centre de symétrie, la figure de diffraction en posséde un aussi.
- Les axes de symétrie de la pupille sont axes de symétrie de la fugure de diffraction.
- Une rotation dans son plan de la pupille entraine une rotation similaire de la figure de diffraction.
- Si on translate la pupille dans son plan il n'y a rien de changé pour la figure de diffraction dans le plan focal d'une lentille.
- Si la direction du faisceau incident devient $\overrightarrow{u}_i = (\alpha_i, \beta_i)$ on a : $\underline{S}'(\alpha, \beta) = \underline{S}(\alpha - \alpha_i, \beta - \beta_i)$.

Théorème 3.4.5 (Babinet)
Pour des pupilles de transparences complémentaires, les amplitudes sont opposées et les intensités les mêmes en dehors de l'image géométrique.

Déf. et prop. 3.4.6 (Pupilles composées) Pour un ensemble de plusieurs pupilles P_i centrées en O_i, on a dans la "direction" $\overrightarrow{k}$, $\underline{S}(\overrightarrow{k}) = \sum_i \int\int_{P_i} \underline{A}_0(x,y)t(x,y)e^{-i\overrightarrow{k}\overrightarrow{OA}} = \sum_i \underline{S}_i(\overrightarrow{k})e^{-i\overrightarrow{k}\overrightarrow{OO_i}}$. Si on suppose les pupilles identiques, $\underline{S}_i(\overrightarrow{k}) = \underline{D}_i(\overrightarrow{k})$ est l'amplitude diffractée dans la direction $\overrightarrow{k}$, et $\underline{I}(\overrightarrow{k}) = \sum_i e^{-i\overrightarrow{k}\overrightarrow{OO_i}}$ un terme d'interférence. On a alors : $\underline{S}(\overrightarrow{k}) = \underline{D}(\overrightarrow{k})\underline{I}(\overrightarrow{k})$. La figure d'interférence est alors en général modulée par la figure de diffraction.

Exemple 7

- Fentes d'Young de largeur a distantes de d. On a $I(\alpha) = 2I_0(1+\cos(\frac{2\pi}{\lambda}d\alpha))\,\mathrm{sinc}^2(\frac{\pi}{\lambda}\alpha a)$.
- Réseaux de N fentes. On pose $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}a\sin(\theta)$ (où θ est un angle mesuré par rapport à la normale au plan du réseau). On a $I = I_0\,\mathrm{sinc}^2(\frac{\pi}{\lambda}b\sin(\theta))(\frac{\sin(\frac{N\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi}{2})})^2$.

Remarque 3.4.7 On sait que les maximums principaux d'un réseau sont en $\frac{\pi}{\lambda}a\sin(\theta) = p\pi,\ p \in \mathbb{N}$. On considèreque deux longueurs d'onde λ et $\lambda+\Delta\lambda$ pour p donné sont séparées si le maximum de l'une est au moins au premier minimum de l'autre (critère de Rayleigh). Le pouvoir de résolution d'un réseau est la quantité $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Np$.

4 Ondes

5 Electromagnétisme

5.1 Equations de Maxwell

Définitions 5.1.1 – Charge. Ponctuelle : q, densité volumique $\rho = \frac{dq}{d\tau}$, surfacique $\sigma = \frac{dq}{dS}$, linéique $\lambda = \frac{dq}{dl}$. Elle est conservée dans tout processus physique ou changement de référentiel.
- Densité de courant. $\overrightarrow{j} = \rho\overrightarrow{v}$, si les charges sont surfaciques on définit $\overrightarrow{j}_s = \sigma\overrightarrow{v}$ la densité de courant superficielle.
- Ligne de courant. C'est la courbe tangente à $\overrightarrow{j}$ à chaque instant.
- Intensité (traversant S). $I = \int\int_S \overrightarrow{j}\overrightarrow{dS} = \frac{dq}{dt}$, où dq est la charge traversant S pendant dt. Si le courant est surfacique on a : $dI = j_s dl$.
- Champ électromagnétique. C'est le couple $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ qui agit sur q par la force de Lorentz : $\overrightarrow{f} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$. Dans le cadre non relativiste, pour deux référentiels galiléens en translation l'un par rapport à l'autre à la vitesse $\overrightarrow{V}$, on a $\overrightarrow{B}' = \overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{E}' = \overrightarrow{E} + \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}$.

Propriété 5.1.2 (Equation de continuité)
On a en chaque point d'un milieu chargé $\mathrm{div}\,\overrightarrow{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$.

Remarque 5.1.3 – Dans un volume εdS on a la charge $dq = \rho\varepsilon dS$ et $\sigma = \lim_{\varepsilon\to 0}\rho\varepsilon$.
- $j_s = \lim_{\varepsilon\to 0} j\varepsilon$.
- pour un régime indépendant du temps : $\mathrm{div}\,\overrightarrow{j} = 0$
- On a l'équivalence formelle :
$\overrightarrow{j}\,d\tau \leftrightarrow \overrightarrow{j}_S dS \leftrightarrow I\overrightarrow{dl} \leftrightarrow q\overrightarrow{v}$

Lois 5.1.4 (Equations de Maxwell) – Dans le vide. $\mathrm{div}\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (M.G.), $\mathrm{div}\overrightarrow{B} = 0$ (M.ϕ), $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$ (M.F), $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$ (M.A.).
- Dans un diélectrique. (M.G.) devient $\mathrm{div}\overrightarrow{E} = \frac{\rho_{\mathrm{libre}}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$ et (M.A.) : $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{j}_{\mathrm{libre}} + \varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$, où ε_r est la permitivité relative du milieu. Sauf mention du contraire il y aura en général : $\rho = 0$ et $j = 0$.
- Dans un conducteur. On a $\varepsilon_r = 1$, $\rho = 0$ mais $\sigma \neq 0$, si le conducteur est parfait : $\gamma = \infty$ donc $E = 0$. On ajoute la loi d'Ohm : $\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E}$.

Propriété 5.1.5 Dans un conducteur parfait (caractérisé pas $\gamma = \infty$) on a : $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$, $\rho = 0$ et $j = 0$ (mais $\sigma \neq 0$ et $j_s \neq 0$).

Remarque 5.1.6 – La conservation de la charge se déduit des équations de Maxwell car $\mathrm{div}(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}) = 0$.
- Les équations sont linéaires, on a le droit au principe de superposition.
- Avec la loi d'Ohm on a $\gamma\mathrm{div}\overrightarrow{E} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ soit encore $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\gamma\rho}{\varepsilon_0}$ donc $\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec typiquement $\tau = 10^{-18}$ s.
- On défini le vecteur déplacement électrique : $\overrightarrow{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\overrightarrow{E}$.

Définition 5.1.7 (Potentiels) $\mathrm{div}\overrightarrow{B} = 0$ donne $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{A}$ est le potentiel vecteur et $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E} + \frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t}) = 0$ donc $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}V - \frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t}$. Pour lever l'indétermination sur les potentiels on se place dans la jauge de Lorentz où : $\mathrm{div}\overrightarrow{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$.

Propriété 5.1.8 (Propagation) – Dans le vide on tire des équations de Maxwell l'équation de propagation : $\Delta\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = 0$, avec $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$. La même équation est vérifiée pour $\overrightarrow{B}$,$\overrightarrow{A}$,V.
- Si on ce place dans un diélectrique, c devient $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0}} = \frac{c_0}{n}$, où n est l'indice du milieu $n = \sqrt{\varepsilon_r}$.
- En présence de densités de charges et de courants on a dans la jauge de Lorentz : $\Delta\overrightarrow{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\overrightarrow{j}$ et $\Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ dont les solutions sont les potentiels retardés : $V(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(P,t-\frac{PM}{c})}{PM}d\tau$ et $\overrightarrow{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\overrightarrow{j}(P,t-\frac{PM}{c})}{PM}d\tau$.

Définition 5.1.9 (Energie) – Puissance de la force de Lorentz agissant sur $dq = \rho d\tau$: $\frac{dP}{d\tau} = \overrightarrow{j}\overrightarrow{E}$.
- L'énergie rayonnée à travers S est le flux du vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0}$ à travers S.
- Densité volumique d'énergie électromagnétique : $w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$.

5.2 Onde Plane Electromagnétique

Propriétés 5.2.1 Dans le cas d'une onde électromagnétique plane se propageant dans le vide dans la direction $\overrightarrow{u}$ on obtient avec les équations de Maxwell :

Les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont transverses (pas de composante dans la direction de propagation : $\overrightarrow{E}\overrightarrow{u} = 0$ et $\overrightarrow{B}\overrightarrow{u} = 0$).
- Les champs sont orthogonaux entre eux : $\overrightarrow{E}\overrightarrow{B} = 0$.
- $B = \frac{E}{c}$ soit : $\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{u}}{c} \wedge \overrightarrow{E}$.
- Si $\overrightarrow{E}$ garde une direction fixe, l'onde est polarisée rectilignement (mais en général celle-ci est elliptique).

Remarque 5.2.2 – Pour une onde sphérique, $\overrightarrow{E} = \frac{f(t-\frac{r}{c})}{r}\overrightarrow{u}_\theta$ on montre : $\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{u}_r}{c} \wedge \overrightarrow{E}$. Cette onde a localement la structure d'une onde plane.
- lorsque la dépendance en $u = t - \frac{x}{c}$ des champs est sinusoïdale, on parle d'OPPS, représentée formellement en notation complexe par : $\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{\overrightarrow{E}}_0 e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}\overrightarrow{r})}$. Sa polarisation est définie de la même manière que pour les ondes lumineuses.

Propriétés 5.2.3 Propagation dans un conducteur :
- on a en notation complexe : $\underline{\overrightarrow{j}} = \gamma\underline{\overrightarrow{E}}$ et $\frac{\partial\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t} = i\omega\underline{\overrightarrow{E}}$ soit formellement dans (M.A.) : $\overrightarrow{rot}\underline{\overrightarrow{B}} = \varepsilon_0\mu_0\varepsilon*_r\frac{\partial\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t}$ avec $\varepsilon*_r = 1 + \frac{\gamma}{i\omega\varepsilon_0}$ la permitivité complexe fictive du milieu. k est donc complexe. Dans le cas du très bon conducteur défini par $1 \leq \frac{\gamma}{i\omega\varepsilon_0}$ on a : $k = \mp\frac{(1-i)}{\delta}$ et $\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{\overrightarrow{E}}_0 e^{-\frac{x}{\delta}}e^{i(\omega t-\frac{x}{\delta})}$ ce qui correspond à une onde se propageant en s'atténuant dans le sens des x positifs. $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$ est l'épaisseur de peau (distance caractéristique d'atténuation).

Propriétés 5.2.4 (Plasma) On fait les hypothèses :
- ions positifs fixes, ions négatifs e^- mobiles.
- le nombre n d'électrons par unité de volume est constant.
- Seule la force de lorentz intervient et on néglige l'action de B devant celle de E. On a alors :

- $m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -e\overrightarrow{E}$ soit $\overrightarrow{j} = \rho\overrightarrow{v} = \gamma * \overrightarrow{E}$ avec $\gamma* = \frac{ne^2}{im\omega}$ et on a encore $\varepsilon*_r = 1+\frac{\gamma}{i\omega\varepsilon_0} = 1-(\frac{\omega_p}{\omega})^2$ où $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$ est la pulsation plasma.
- si $\omega > \omega_p$, le milieu se comporte comme un diélectrique d'indice plus petit que 1. Le milieu est dispersif.
- si $\omega < \omega_p$, k est imaginaire et l'onde se propage en s'atténuant : elle ne peut donc se propager dans le plasma.

5.3 Changements de Milieux

Propriétés 5.3.1 (Discontinuités du champ)
Ici l'indice N désigne la composante normale d'un vecteur, et T la composante tangentielle par rapport à la surface de séparation des milieux.
- $\overrightarrow{D}_{N_1} - \overrightarrow{D}_{N_2} = \sigma\overrightarrow{N}_{2\to1}$
- $\overrightarrow{E}_{T_1} = \overrightarrow{E}_{T_2}$
- $\overrightarrow{B}_{N_1} = \overrightarrow{B}_{N_2}$
- $\overrightarrow{B}_{T_1} - \overrightarrow{B}_{T_2} = \mu_0\overrightarrow{j}_s \wedge \overrightarrow{N}_{2\to1}$

Propriété 5.3.2 Réflexion normale sur un conducteur parfait. Conséquence directe des propriétés du conducteur parfait et des propriétés de discontinuité des champs (pour une OPPS) :
- Normale. La condition aux limites impose l'existence d'un champ réfléchi $\underline{\overrightarrow{E}}_r = \underline{\overrightarrow{E}}_{r0}e^{i(\omega' t - k' x)}$ tel que : $\forall t$, $\underline{\overrightarrow{E}}_{r0}e^{i\omega' t} + \underline{\overrightarrow{E}}_{i0}e^{i\omega t} = 0$, on a alors : $\omega' = \omega$ (donc $k' = k$), $\underline{\overrightarrow{E}}_{r0} = -\underline{\overrightarrow{E}}_{i0}$, soit le champ résultant : $\overrightarrow{E} = 2\overrightarrow{E}_{i0}\sin(kx)\sin(\omega t)$ et $\overrightarrow{B} = 2\overrightarrow{B}_{i0}\cos(kx)\cos(\omega t)$. L'onde ne se propage plus elle est stationnaire. Aspect énergétique : $\overrightarrow{\Pi} = \frac{E_{i0}B_{i0}}{\mu_0}\sin 2kx)\sin(2\omega t)\overrightarrow{u}_x$ et $< w >= \varepsilon_0 E_{i0}^2 = \frac{B_{i0}^2}{\mu_0}$.
- Deux conducteurs en regard. Le champ $\overrightarrow{E}$ doit s'annuler sur les deux conducteurs soit $l = p\frac{\lambda}{2}$ et $\overrightarrow{E} = 2\overrightarrow{E}_0\sin(p\pi\frac{x}{l})\sin(\omega_p t)$ où $\omega_p = pc\frac{\pi}{l}$
- Oblique. Champ incident : $\underline{\overrightarrow{E}}_i = \overrightarrow{E}_0 e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}_i\overrightarrow{r})}$, champ réfléchi : $\underline{\overrightarrow{E}}_r = \underline{\overrightarrow{E}}_1 e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}_r\overrightarrow{r})}$. Les conditions aux limites imposent : $\underline{\overrightarrow{E}}_1 = -\overrightarrow{E}_0$ et $\forall\overrightarrow{(r)} = (x,0,z)$, $\overrightarrow{k}_i\overrightarrow{r} = \overrightarrow{k}_r\overrightarrow{r}$, soit $k_{rz} = 0$, $k_{ix} = k_{rx}$, $k_{iy} = k_{ry}$ (on a retrouvé les lois de Descartes). Ce qui donne pour le champ total $\overrightarrow{E} = -2\overrightarrow{E}_0\sin(k_{iy}y)\sin(\omega t - k_{ix}x)$. On a $\overrightarrow{B}$ par $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$. Le champ ne forme plus un trièdre rectangle.

Remarque 5.3.3
- Courant de surface. Il est créé par la discontinuité de $\overrightarrow{B}$ et vaut $\overrightarrow{j}_S = \frac{2B_{i0}}{\mu_0}\cos(\omega t)\overrightarrow{u}_y$.
- Pression de radiation p_r. En l'interprétant comme due au choc des photons sur la paroi on montre que $p_r = w$. En effet, à chaque choc la paroi reçoit $\Delta\overrightarrow{p}_p = 2\hbar\overrightarrow{k}$ et le nombre N de photons incidents par unité de temps est tel que : $< \Pi dS >= dNh\nu$ soit : $d\overrightarrow{f} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = -\frac{E_{i0}B_{i0}}{\mu_0 h\nu}\hbar k\overrightarrow{dS} = -p_r\overrightarrow{dS}$. cqfd.
- Quand on recherche un champ se propageant dans une direction on peut directement supposer : $\underline{\overrightarrow{E}} = f(y)e^{i(\omega t-\alpha x)}\overrightarrow{u}_z$, par exemple, et en déduire f avec l'équation de propagation.

Propriété 5.3.4
- Réflexion normale sur un conducteur imparfait. Champ incident : $\underline{\overrightarrow{E}}_i = \overrightarrow{E}_0 e^{i(\omega t-kx)}$, $\underline{\overrightarrow{B}}_i = \overrightarrow{B}_0 e^{i(\omega t-kx)}$, $\overrightarrow{B}_0 = \overrightarrow{u}_x \wedge \frac{\overrightarrow{E}_0}{c_0}$, champ réfléchi : $\underline{\overrightarrow{E}}_r = \underline{\overrightarrow{E}}_1 e^{i(\omega t-kx)}$, $\underline{\overrightarrow{B}}_r = \underline{\overrightarrow{B}}_1 e^{i(\omega t-kx)}$, $\underline{\overrightarrow{B}}_1 = -\overrightarrow{u}_x \wedge \frac{\underline{\overrightarrow{E}}_1}{c_0}$, champ transmis : $\underline{\overrightarrow{E}}_t = \underline{\overrightarrow{E}}_2 e^{-\alpha x}e^{i(\omega t-\alpha x)}$, $\underline{\overrightarrow{B}}_t = \underline{\overrightarrow{B}}_2 e^{-\alpha x}e^{i(\omega t-\alpha x)}$, $\underline{\overrightarrow{B}}_2 = \overrightarrow{u}_x \wedge \frac{\underline{\overrightarrow{E}}_2}{c*}$. Avec $\alpha = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}$, $c* = \frac{\omega}{\alpha(1-i)}$ et $|c*| \le c_0$. On a alors :
$\underline{\overrightarrow{E}}_1 \simeq -\overrightarrow{E}_0$, $\underline{\overrightarrow{B}}_1 \simeq \overrightarrow{B}_0$ et
$\underline{\overrightarrow{E}}_t = 2\overrightarrow{E}_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0\omega}{\gamma}}e^{-\alpha x}e^{i(\omega t-\alpha x+\frac{\pi}{4})}$,
$\underline{\overrightarrow{B}}_t = 2\overrightarrow{B}_0 e^{-\alpha x}e^{i(\omega t-\alpha x)}$

Exemple 8 (Guide d'ondes) C'est une structure métallique creuse, à section rectangulaire (de côtés a et b), infiniment longue selon O_z, dans laquelle on anvisage la propagation d'une onde électromagnétique transvers électrique (TE, i.e. : $\overrightarrow{u}_z\underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{0}$). On écrit alors $\underline{E}_x = E_1(x,y)e^{i(\omega t-kz)}$, $\underline{E}_y = E_2(x,y)e^{i(\omega t-kz)}$, $\underline{E}_z = 0$, chaque composante vérifiant $\Delta\underline{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\underline{E}}{\partial t^2} = 0$, et elles sont liées pas $\mathrm{div}\underline{\overrightarrow{E}} = 0$. On cherche des solutions à variables séparées soit : $E_1(x,y) = f(x)g(y)$. On a avec les conditions aux limites :
$E_x = E_1\cos(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})\cos(\omega t-kz)$,
$E_y = E_2\sin(\frac{m\pi x}{a})\cos(\frac{n\pi y}{b})\cos(\omega t-kz)$ et
$\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} = \frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2$. Cette onde est dite TE_{mn}. Il y a une fréquence minimale (de coupure) admissible : $\nu_c = inf(\frac{c_0}{2b},\frac{c_0}{2a})$ et on des modes propres et fréquences propres pour le guide d'ondes. On généralise facilement au cas d'une cavité rectangulaire (longueur c sur O_z).

5.4 Rayonnement du Dipôle

Définition 5.4.1 Un dipole est dit oscillant si $\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{a} = qa\overrightarrow{u}_z$ varie dans le temps sinusoïdalement (on considérera afin d'alléger le calcul que c'est q qui varie, sans perdre toutefois en généralité). Soit en complexes : $\underline{q} = q_0 e^{j\omega t}$ et $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}_0 e^{j\omega t}$. A cette oscillation on associe un courant ($i = \frac{dq}{dt}$), soit : $\underline{i} = \underline{i}_0 e^{j\omega t}$ avec $\underline{i}_0 = j\omega q$.

Proposition 5.4.2 (Champs) Avec les approximations usuelles du dipôle on obtient :

Potentiel vecteur. $\overrightarrow{A}(r,t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i(t-\frac{r}{c})}{r}a\overrightarrow{u}_z$ Soit en coordonnées sphériques :
- Champ $\overrightarrow{B}$. $\underline{B}_r = \underline{B}_\theta = 0$ et $\underline{B}_\phi = \frac{\mu_0 a\underline{i}_0}{4\pi r}\sin(\theta)(\frac{1}{r} + \frac{j\omega}{c})\exp(j\omega(t-\frac{r}{c})$.
- Champ $\overrightarrow{E}$. $\underline{E}_r = \frac{\underline{i}_0 a}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\cos(\theta)}{j\omega r^2}(\frac{1}{r} + \frac{j\omega}{c})\exp(j\omega(t-\frac{r}{c})$, $\underline{E}_\theta = \frac{\underline{i}_0 a}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin(\theta)}{j\omega r}(\frac{1}{r^2} + \frac{j\omega}{c}(\frac{1}{r} + \frac{j\omega}{c}))\exp(j\omega(t-\frac{r}{c})$ et $\underline{E}_\phi = 0$.

Remarque 5.4.3 A grande distance on retrouve $\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{u}_r}{c}\wedge\overrightarrow{E}$. La structure du champ est celle d'une onde sphérique assimilable localement à celle d'une onde plane.

Propriété 5.4.4 (Puissance rayonnée)
À grande distance on a : $< \overrightarrow{\Pi} >= cte\frac{\sin^2(\theta)}{r^2}\frac{1}{\lambda^4}\overrightarrow{u}_r$. Conséquences :
- Π est en $\frac{1}{r^2}$: c'est la conservation de l'énergie.
- Π proportionnel à $\sin^2(\theta)$: le rayonnement n'est pas isotrope et est prépondérant à 90° du dipôle.
- Π proportionnel à $\frac{1}{\lambda^4}$: le rayonnement est favorable aux faible longueurs d'onde (diffusion de Rayleigh).

La puissance rayonnée à travers tout l'espace est alors : $P = RI_0^2$, où $R = \frac{\pi}{3\varepsilon_0 c}\frac{a^2}{\lambda^2}$ est la résistance de rayonnement.

Exemple 9 (Antennes) Une antenne est un conducteur de longueur $2l$, modélisé par une ligne de transmission, nécessaire à l'émission et la reception des ondes électromagnétiques. l'antenne est accordée si $l = p\frac{\lambda}{4}$, et on prend en général $l = \frac{\lambda}{4}$. Pour calculer le champ rayonné on considère l'antenne comme une succession continue de dipôles oscillants de longueur dz. Ce qui donne à grande distance : $\underline{\overrightarrow{E}} = 2\frac{\mu_0}{4\pi}I_0jc\frac{e^{j(\omega t-kr)}}{r}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos(\theta))}{\sin(\theta)}\overrightarrow{u}_\theta$. Le rayonnement est anisotrope, principalement dirigé orthogonalement à l'antenne.

5.5 Le Corps Noir

Définition 5.5.1 Un corps noir est un corps qui absorbe intégralement le raynnement à toute longueur d'onde. Il réémet tout le rayonnement reçu, selon une répartition spectrale indépendante du corps (noir) considéré : c'est le rayonnement du corps noir.

Lois 5.5.2
- La loi du déplacement de Wien (1893) indique comment varie le maximum de cette densité spectrale : $\lambda_m T = cte = 2.9\ mm.K$
- loi de Stefan (1879). la puissance émise par unité de surface est : $\phi_e = \frac{dP_e}{dS} = \sigma T^4$ avec $\sigma = 5.67\ 10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}$.

Remarque 5.5.3
- Un corps peut se comporter comme un corps noir à un coefficient d'absorption près $a(\lambda)$ (absorption selective selon les longueurs d'onde), dans ce cas là la réémission se fait comme celle d'un corps noir au coefficient $a(\lambda)$ près. un tel corps est dit gris.
- on peut effectuer une mesure de la température d'un corps rayonnant thermiquement (température T inconnue) en superposant à son rayonnement celui d'un corps noir étalon à la température T_1 connue. Si $T < T_1$ le corps apparait sombre, si $T > T_1$ le corps parait brillant et si $T = T_1$ le corps semble disparaitre.
- le rayonnement cosmologique fossile est un rayonnement de type corps noir àla température de 3 K.

Déf. et prop. 5.5.4 (Energie)
- Le flux surfacique incident est la puissance reçue par unité de surface : $\phi_i = \frac{dP_i}{dS}$, il est soit renvoyé soit absorbé : $\phi_i = \phi_r + \phi_a$.
- Le flux surfacique partant ϕ_p (émittance) est défini comme : $\phi_p = \phi_r + \phi_e$.
- A l'équilibre on a : $\phi_e = \phi_a = \phi$. Ceci est valable à toute longueur d'onde on peut donc écrire : $\phi_\lambda = \phi_{e\lambda} = \phi_{a\lambda}$. On appelle u la densité volumique d'énergie du gaz de photons on a alors : $\phi = \frac{uc}{4}$ (resp. $\phi_\lambda = \frac{u_\lambda c}{4}$).

Lois 5.5.5
- La loi de Wien stipule que $u_\nu = T^3 f(\frac{\nu}{T})$.
- Modèle de Rayleigh-Jeans (1900). $u_\nu^{RJ} = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3}$. Valable aux "faibles" valeurs de ν.
- Modèle de Wien (1896). $u_\nu^W = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\exp(-\frac{h\nu}{k_B T})$. valable pour ν "grand".
- Loi de Planck (1900). $u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{k_B T})-1}$. Qui donne $u = \frac{4\sigma}{c}T^4$, avec $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2h^3} = 5.67\ 10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}$, ce qui concorde avec la valeur expérimentale.

Remarque 5.5.6 Ce calcul mené par Planck utilise pour la première fois les constantes h et k_B.

5.6 Electrostatique

Propriétés 5.6.1 (Equations générales) Les équations de Maxwell donnent : $\mathrm{div}\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$. Ce qui entraine :

$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$, V est défini à une constante près, les lignes de champ sont orthogonales aux équipotentielles et orientées du potentiel le plus haut au potentiel le plus bas.
- Théorème de Gauss. $\int\int\overrightarrow{E}\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$.
- Equation de Poisson. $\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$.
- Le potentiel n'a pas d'extremum dans une région vide de charges.
- Discontinuités. le champ $\overrightarrow{E}$ est discontinu à travers une surface chargée : $\overrightarrow{E}_{N_1} - \overrightarrow{E}_{N_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{N}_{2\to1}$ et $\overrightarrow{E}_{T_1} = \overrightarrow{E}_{T_2}$. Le potentiel est continu à travers une surface chargée.
- Champ et potentiel dus à une charge ponctuelle. $\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$ et $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$.

Propriété 5.6.2 (Energie)
- Energie propre d'une distribution de charges. La densité d'énergie est $w_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$, l'énergie dans le volume V est $W = \iiint_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}d\tau$. Soit encore : $W = \iiint_{\text{espace}}\frac{1}{2}\rho V d\tau$.
- Energie potentielle (externe). Pour une charge, $E_p = qV$, pour une distribution de charges, $E_p = \sum_i q_i V_{\text{ext}_i}$ où V_{ext_i} est le potentiel en q_i du champ créé par les charges extérieures à la distribution.

Lois 5.6.3 (symétries) Principe de Curie : Un phénomène physique posséde au moins les éléments de symétrie de ses causes.
- Si la distribution de charges est invariante par translation selon O_z, le champ ne dépend pas de z.
- Si la distribution de charges est invariante par rotation d'angle θ, le champ ne dépend pas de θ.
- En un point appartenant à un plan de symétrie d'une distribution de charges, le champ électrostatique appartient à ce plan.
- En un point appartenant à un plan d'antisymétrie d'une distribution de charges, le champ électrostatique est orthogonal à ce plan.

Exemple 10 (Champs usuels)
- Sphère de rayon R, chargée avec une densité volumique uniforme ρ, charge totale Q. $r \geq R$, $\overrightarrow{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$ et $r \leq R$, $\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{r}$.
- Sphère de rayon R, chargée avec une densité surfacique uniforme σ, charge totale Q. $r \geq R$, $\overrightarrow{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$ et $r \leq R$, $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$.
- Fil infini, chargé avec une densité linèique uniforme λ. $\overrightarrow{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{r}}{r^2}$
- Plan, chargé avec une densité surfacique uniforme σ. $z > 0$, $\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u}_z$ et $z < 0$, $\overrightarrow{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u}_z$.
- Disque, chargé avec une densité surfacique uniforme σ, sur son axe : $\overrightarrow{E} = \frac{\sigma\Omega}{4\pi\varepsilon_0}\overrightarrow{u}_z$, où Ω est l'angle solide sous lequel on voit le disque depuis le point M.

Déf. et prop. 5.6.4 (Dipôles)
- Un dipôle est un ensemble de deux charges $q > 0$ et $-q$ distantes de a. On définit le moment dipolaire : $\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{a}$ et on a alors (à grande distance) : $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{r}}{r^3}$. Les équipotentielles sont les courbes : $r^2 = A\cos(\theta)$, les lignes de champs vérifient : $\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta}$, ce qui donne : $r = K\sin^2(\theta)$.

– Développement multipolaire. On considère un ensemble de charges q_i plaçées en A_i, on pose $\overrightarrow{a}_i = \overrightarrow{OA_i}$, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{r}_i = \overrightarrow{A_iM}$. Soit $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{Q}{r}+\sum_i q_i \overrightarrow{a}_i\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}+\sum_i q_i\frac{3(\overrightarrow{a}_i\overrightarrow{r})^2-a_i^2r^2}{2r^5} = V_0+V_1+V_2$. Si $Q \neq 0$, on place l'origine au barycentre de la distribution de charges et alors $\overrightarrow{p} = \sum_i q_i\overrightarrow{a}_i = \overrightarrow{0}$ et $V = V_0$ à un terme d'ordre deux près. Si $Q = 0$, la quantité $\overrightarrow{p}$ est indépendante de l'origine choisie et la distribution est équivalente à un dipôle de moment $\overrightarrow{p}$ placé à l'origine. Si $Q = 0$ et $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{0}$, la distribution est un quadrupôle.
– On pourait bien sur faire un DL à l'ordre n et obtenir un développement multipolaire d'ordre n.
– Action d'un champ uniforme sur un dipôle. Résultante : $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$, couple : $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}$, énergie potentielle : $E_p = -\overrightarrow{p}\overrightarrow{E}$.
– Action d'un champ non uniforme. $\overrightarrow{R} = (\overrightarrow{p}\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}(O)$ et $E_p = -\overrightarrow{p}\overrightarrow{E}(O)$.

Remarque 5.6.5 On peut écrire de façon plus "intrinsèque" : $V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{div}\frac{\overrightarrow{p}}{r}$ et $\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\overrightarrow{grad}\mathrm{div}\frac{\overrightarrow{p}}{r}$.

Propriété 5.6.6 (Conducteurs) – Dans un conducteur à l'équilibre on a : $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$ et donc $\rho = 0$, $V = cte$, $Q = \int\int_S \sigma dS$.
– On appelle capacité propre du conducteur la quantité : $C_0 = \frac{Q}{V}$.
– Pouvoir des pointes : le champ est plus intense au voisinage des zones de forte courbure du conducteur.

Théorème 5.6.7 (Coulomb)
Juste au dessus de la surface d'un conducteur à l'équilibre on a $\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{N}$

Corollaire 5.6.8 (Pession électrostatique) La pression s'exerçant sur un élément dSla surface du conducteur (due aux autres charges agissant sur les charges de dS) est $p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$. C'est encore valable si il y a plusieurs conducteurs tant que l'équilibre est réalisé. C'est le seul moyen (rigoureux) de calculer la force s'exerçant sur un conducteur.

Propriété 5.6.9 (Conducteur en présence de charges)
– Le potentiel doit vérifier : $\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$, $V = V_0$ sur la surface du conducteur et $V = 0$ à l'infini, problème admettant une solution unique.
– On raisonne ainsi (si c'est possible) : on cherche une distibution discrète de charges créant des surfaces équipotentielles de la forme adéquate, le potentiel est alors en tout point (sauf à l'intérieur des conducteurs) celui de l'ensemble conducteur/charges. On appelle ce procédé la méthode des images électriques.

Remarque 5.6.10 – Avec deux charges on crée des équipotentielles sphériques (points de Weierstrass du dioptre sphérique...)
– Avec deux charges le plan médian est une surface équipotentielle.
– Avec deux fils infinis (paralléles) on crée des équipotentielles cylindriques (le plan médian est encore une équipotentielle).

Propriété 5.6.11 (Equilibre de conducteurs) Avec la linéarité des équations de l'électrostatique on peut se contenter de connaitre deux états particuliers faciles du système de deux conducteurs A_1 et A_2 pour déterminer n'importe quel état du système. On choisi : $V_1 = 1\ V$ et $V_2 = 0\ V$. Alors $Q_1 = C_{11}$ et $Q_2 = C_{21}$.
– $V_1 = 0\ V$ et $V_2 = 1\ V$. Alors $Q_1 = C_{12}$ et $Q_2 = C_{22}$. On a alors :
– $V_1 = V_1\ V$ et $V_2 = 0\ V$. Alors $Q_1 = C_{11}V_1$ et $Q_2 = C_{21}V_1$.
– $V_1 = 0\ V$ et $V_2 = V_2\ V$. Alors $Q_1 = C_{12}V_2$ et $Q_2 = C_{22}V_2$ Ce qui donne pour un état quelconque (V_1, V_2) : $\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$. Cette matrice (symétrique) s'appelle la matrice capacité du système, les coefficients : C_{11} et C_{22} sont les coefficients de capacité et C_{12} et C_{21} sont les coefficients d'influence. ils ne dépendent que de la géométrie des conducteurs. Ils vérifient :
– $C_{12} = C_{21} \leq 0$, $C_{ii} \geq 0$ $C_{11} + C_{12} \geq 0$ et $C_{22} + C_{21} \geq 0$
– On généralise facilement au cas de N conducteurs.

Définition 5.6.12 Si toutes les lignes de champ issues de A_1 rencontrent A_2 on dit que les deux conducteurs sont en influence totale.

Propriété 5.6.13 (Condensateurs)
– Deux conducteurs en influence totale forment un condensateur. En général ceci est réalisé en en tourant le conducteur A_1 par le conducteur A_2. les indices i et e désignent içi les faces internes (resp. externes des conducteurs.
– Soient Q_1 et $Q_2 = Q_{2i} + Q_{2e}$ les charges des deux conducteurs.
Supposons $V_1 \neq 0$ et $V_2 = 0\ V$.
– On a facilement dans la matrice capacité : $C_{12} = -C_{11}$ et comme le potentiel est nul à l'extérieur, $Q_2 = Q_{2i} = -Q_1$.
– Donc : $Q_1 = C_{11}(V_1 - V_2)$, que l'on réécrit : $Q = CV$, où $C = C_{11}$ est la capacité du condensateur et Q la charge du condensateur.
Supoosons $V_2 \neq 0$, ce qui ne change rien à ce qui se passe à l'intérieur.
– Du point de vue de l'extérieur tout se passe comme si il y avait un conducteur plein des dimensions de A_2 porté au potentiel V_2, on a donc $Q_{2e} = C_2V_2$, où C_2 est la capacité propre du conducteur équivalent à A_2. Ce qui donne : $C_{22} = C_{11} + C_2$
Dans tout les cas on a la matrice capacité : $\begin{pmatrix} C & -C \\ -C & C + C_2 \end{pmatrix}$

Remarque 5.6.14 En fait le nom de condensateur désigne uniquement les armatures en regard des deux conducteurs.

Exemple 5.6.15 (Capacités usuelles)
On considère qu'un diélectrique ε_r remplit l'espace entre les armatures.
– Condensateur spérique. $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}$.
– Condensateur cylindrique de hauteur h. $C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r h}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$.
– Condensateur plan (surface S distance e). $C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{e}$.

Déf. et prop. 5.6.16 (Energie) – pour un système de conducteurs : $E_p = \frac{1}{2}\sum_i Q_iV_i$.
– Si on fait passer l'état du système de Q_i, V_i à Q_i', V_i', on a : $W_{\mathrm{op}} = \Delta E_p = E_p' - E_p$.
– pour un condensateur : $E_p = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2 = W + W_e$, où W est l'énergie du condensateur et W_e est l'énergie de la face externe de A_2.

5.7 Magnétostatique

Propriétés 5.7.1 (Equations générales) Les équations de Maxwell donnent : $\text{div}\overrightarrow{B} = 0$ et $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j}$, d'où l'on tire :
$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{A}$ est le potentiel vecteur, défini à un gradient près.

- Théorème d'Ampère. $\oint \overrightarrow{B}\overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$.
- Dans la jauge de Coulomb on a : $\Delta\overrightarrow{A} + \mu_0 \overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$, d'où l'on tire : $\overrightarrow{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \overrightarrow{j}\frac{d\tau}{r}$.
- Discontinuités. Le champ $\overrightarrow{B}$ est discontinu à travers une surface portant une densité surfacique de courant $\overrightarrow{j}_S$: $\overrightarrow{B}_{N_1} = \overrightarrow{B}_{N_2}$ et $\overrightarrow{B}_{T_1} - \overrightarrow{B}_{T_2} = \mu_0 \overrightarrow{j}_s \wedge \overrightarrow{N}_{2\to 1}$. Le potentiel vecteur est continu à travers une telle surface.

Lois 5.7.2 (Biot et Savart) Le champ du à une distribution de courants est : $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\overrightarrow{j}\,d\tau\wedge\overrightarrow{r}}{r^3}$

Propriété 5.7.3 (Force de Laplace)
- $\overrightarrow{df} = \overrightarrow{j}\,d\tau \wedge \overrightarrow{B}$

Pour deux circuits filiformes (C_1 et C_2) agissant l'un sur l'autre on a :
- $\overrightarrow{R} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2} i_2\overrightarrow{dl}_2 \wedge (\oint_{C_1} i_1\overrightarrow{dl}_1 \wedge \frac{\overrightarrow{r}_{12}}{r_{12}^3})$.
- il n'y a pas action et réaction au niveau de $\overrightarrow{dl}_1$ et $\overrightarrow{dl}_2$ mais au niveau des résultantes globales.

Propriété 5.7.4 (Energie)
- Densité d'énergie : $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$.
- Energie comprise dans le volume v : $W = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0}d\tau$. Soit encore : $W = \frac{1}{2}\iiint_{\text{espace}} \overrightarrow{j}\overrightarrow{A}d\tau$.
- Dans le cas des circuits filiformes : $W = \frac{1}{2}\sum_k I_k\Phi_k$.

Lois 5.7.5 (symétries)
- Si la distribution de courants est invariante par translation selon O_z, le champ ne dépend pas de z.
- Si la distribution de courants est invariante par rotation d'angle θ, le champ ne dépend pas de θ.
- En un point appartenant à un plan de symétrie d'une distribution de charges, le champ magnétostatique est orthogonal à ce plan.
- En un point appartenant à un plan d'antisymétrie d'une distribution de charges, le champ magnétostatique appartient à ce plan.

Exemple 5.7.6 (Champs usuels)
- Fil infini d'axe O_z parcouru par un courant I : $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{u}_\theta$.
- Fil fini : $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))\overrightarrow{u}_\theta$.
- Spire de rayon a sur son axe : $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2a}\sin^3(\theta)\overrightarrow{u}_z$. Attention à la définition de θ ici il est tel que $\cos(\theta) = \overrightarrow{MO}\overrightarrow{MA}$.
- Bobine plate constituée de N spires jointives : $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 NI}{2a}\sin^3(\theta)\overrightarrow{u}_z$.
- Solénoïde circulaire d'axe $\overrightarrow{u}_x$, n spires par unité de longueur. $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 nI}{2}(\cos(\theta_N) - \cos(\theta_S))\overrightarrow{u}_x$. (l'axe Sud-Nord est pris dans le même sens que $\overrightarrow{u}_x$).
- Solénoïde infini de rayon a, d'axe $\overrightarrow{u}_z$. Si $r < a$, $\overrightarrow{B} = \mu_0 nI\overrightarrow{u}_z$ et si $r > a$, $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$.

Remarque 5.7.7 Par convention, une intensité de 1 A circule dans deux fils infinis paralléles distants de 1 m dont la force exercée par l'un sur l'autre vaut 2 10^{-7} N.

Déf. et prop. 5.7.8 (Dipôles) Loin d'un circuit plan on a :
$\overrightarrow{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\overrightarrow{M} \wedge \frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$, où $\overrightarrow{M} = I\overrightarrow{S}$ est le moment magnétique du circuit.
Soit en coordonnées sphériques, avec $\overrightarrow{M} = IS\overrightarrow{u}_z$:

- $\overrightarrow{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M\sin(\theta)}{r^2}\overrightarrow{u}_\phi$ et $B_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2M\cos(\theta)}{r^3}$ et $B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M\sin(\theta)}{r^3}$.
- Généralisation. on peut écrire selon la nature du circuit : $\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}\oint \overrightarrow{r} \wedge I\overrightarrow{dr}$, $\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}\int\int \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{j}_S dS$ ou $\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}\iiint \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{j}\,d\tau$.
- Action d'un champ uniforme sur un circuit plan. $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{B}$ et $E_p = -\overrightarrow{M}\overrightarrow{B}$.
- Action d'un champ quasi uniforme. $\overrightarrow{R} = (\overrightarrow{M}\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{B}$ et $E_p = -\overrightarrow{M}\overrightarrow{B}$.

Remarque 5.7.9 On peut écrire de façon plus "intrinséque" : $\overrightarrow{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\overrightarrow{rot}\frac{\overrightarrow{M}}{r}$ et $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\overrightarrow{grad}\text{div}\frac{\overrightarrow{M}}{r}$.

Propriété 5.7.10 (Travail forces Laplace) On considère le déplacement d'un circuit parcouru par un courant I dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ constant. Le travail total des forces de Laplace lors du déplacement est proportionnel au flux (de $\overrightarrow{B}$) coupé lors de déplacement, soit $W_L = I\Phi_c$.

Théorème 5.7.11 (Maxwell)
On a : $W_L = -\Delta E_p = +I\Delta\Phi$, où Φ est le flux de $\overrightarrow{B}$ à travers le cicuit.

Corollaire 5.7.12 Un circuit libre d'évoluer ou de se déformer sous l'action des forces de Laplace va tendre à rendre son énergie potentielle minimale, donc à rendre le flux le traversant maximum.

5.8 Induction

Définition 5.8.1 (ARQP) La condition de validité de l'ARQP est : les dimensions caractéristiques des circuits considérés sont négligeables devant la longueur d'onde.

Propriété 5.8.2 (Conducteurs dans l'ARQP)
- On néglige le retard du à la propagation ; les potentiels retardés deviennent alors :
  $V(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\text{sources}} \frac{\rho(P,t)}{PM}d\tau$
  $\overrightarrow{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\text{sources}} \frac{\overrightarrow{j}(P,t)}{PM}d\tau$.
- Les équations de Maxwell deviennent : $\text{div}\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\text{div}\overrightarrow{B} = 0$, $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$ et $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{j}$.
- On a toujours : $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}V - \frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t}$.
- On a de plus : $\text{div}\overrightarrow{j} = 0$: l'intensité est la même en tout point d'un circuit.
- Loi d'Ohm (locale). $\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E}$
- On a encore : $\Delta\overrightarrow{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$ et $\Delta\overrightarrow{j} - \mu_0\gamma\frac{\partial\overrightarrow{j}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$. Ce qui implique : le courant est surfacique, avec une épaisseur caractéristique (épaisseur de peau) $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$. Pour des basses fréquences le courant sera volumique tandis que pour de hautes fréquences il sera surfacique : c'est l'effet de peau.

Déf. et prop. 5.8.3 (Generateurs)
- Un générateur sert à mettre en mouvement des charges dans un cicuit en faisant intervenir des forces non électrostatiques qui fournissent de l'énergie au système. Si

la force $\overrightarrow{f}_m$ agit sur la charge q on définit le champ électromoteur par $\overrightarrow{f}_m = q\overrightarrow{E}_m$.
- Sous l'effet du champ électromoteur, un champ électrostatique s'établit en sens contraire de telle sorte que à l'équilibre, $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{E}_m$.
- La force électromotrice du générateur est la quantité : $e = \int_A^B \overrightarrow{E}_m \overrightarrow{dl}$.
- lorsque le générateur débite on a : $\overrightarrow{j} = \gamma(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{E}_m) \neq \overrightarrow{0}$.et sur une portion AB de circuit contenant le générateur on a $V_A - V_B + e_{AB} = R_{AB}I$ (loi d'Ohm généralisée ou loi de Pouillet).

Déf. et prop. 5.8.4 (Induction)
Expérimentalement :
- il se crée dans un circuit fixe plongé dans un champ $\overrightarrow{B}$ variable un courant induit i tel que le champ $\overrightarrow{B}_i$ créé par i s'oppose aux variations de $\overrightarrow{B}$, c'est la loi de Lenz (principe de modération).
- le même phénomène apparait si c'est le circuit qui bouge dans $\overrightarrow{B}$ constant.

Dans les deux cas la fem d'induction est donnée par la loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, où Φ est le flux de $\overrightarrow{B}$ à travers le circuit. Si il n'y a pas d'autre fem on aura aussi $e = Ri$.
- Circuit fixe dans un champ variable. $\overrightarrow{E}_m = -\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$.
- Circuit mobile dans un champ constant. $\overrightarrow{E}_m = \overrightarrow{v}_e \wedge \overrightarrow{B}$. Dans le cas général on a : $\overrightarrow{E}_m = -\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} + \overrightarrow{v}_e \wedge \overrightarrow{B}$.
- Autoinduction. Un cicuit parcouru par un courant variable crée un champ variable dont le flux créé une fem dans le circuit lui même dit fem d'autoinduction.
- Coefficients d'induction. Si deux circuits C_1 et C_2 agissent l'un sur l'autre on a : $\Phi_{1/2} = M_{12}i_1$ et $\Phi_{2/1} = M_{21}i_2$ avec $M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{\overrightarrow{dl}_1\overrightarrow{dl}_2}{r_{12}} = M_{21}$. M_{12} est le coefficient de mutuelle induction des circuits.
- Dans le cas de l'autoinduction on a de même : $\Phi = Li$, L est le coefficient d'autoinduction.
- on a : $M_{12}^2 \leq L_1L_2$, avec égalité si le couplage de circuits est parfait.

Exemple 11 Pour un solénoïde de N spires, de longueur l et de section S : $L = \mu_0 N^2 \frac{S}{l}$

Propriété 5.8.5 (Energie) On a : $W_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}i\Phi = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0}d\tau$. C'est cette formule qui sert à mesurer L quand le calcul direct du flux est impossible.

Déf. et prop. 5.8.6 On appelle courants de Foucault les courants induits qui prennent naissance dans un conducteur et dissipent de l'énergie par effet Joule. On procède par approximations successives : le champ $\overrightarrow{B}_0$ créé un champ $\overrightarrow{E}_1$ tel que $\overrightarrow{E}_1 = -\frac{\partial \overrightarrow{A}_0}{\partial t}$ et une densité de courant par $\overrightarrow{j}_1 = \gamma\overrightarrow{E}_1$. Ce sont dans l'approximation des bons conducteurs les seuls termes non négligeables. On calcule la puissance dissipée par : $dP = \frac{j_1^2}{\gamma}d\tau$.

Exemple 5.8.7 (Transducteurs)
Ce sont des dispositifs transformant de l'énergie électrique en énergie mécanique. Il faut deux équations pour les modéliser : l'une mécanique et l'autre électrique. On effectue les calculs d'actions mécaniques soit directement avec $\overrightarrow{df}_L = i\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}$, soit en considérant le circuit comme un dipôle et en écrivant (par exemple) : $\overrightarrow{\Gamma}_L = \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{B} = i\overrightarrow{S} \wedge \overrightarrow{B}$, quand la variation de $\overrightarrow{S}$ est facile à écrire en fonction du paramètre cinématique.